

Tema 7

Circuitos y sistemas de segundo orden

Versión imprimible del tema 7. Rafael Gómez Alcalá, Escuela Politécnica, Universidad de Extremadura

7.1

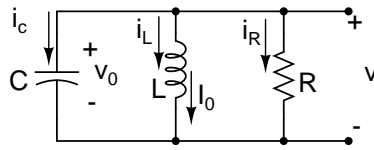
Índice

1. Respuesta natural de un circuito RLC en paralelo	7-2
2. Respuesta escalón de un circuito RLC en paralelo	7-15
3. Respuesta natural y escalón de un circuito RLC en serie	7-18

1. Respuesta natural de un circuito RLC en paralelo

Respuesta natural

El primer paso para determinar la respuesta natural del circuito, consiste en deducir la ecuación diferencial que debe cumplir la tensión $v(t)$.



Se elige determinar la tensión primero, ya que es la misma para cada componente. Después, es posible encontrar la corriente de rama utilizando la relación de corriente-tensión para el elemento de cada rama.

7.2

Se obtiene fácilmente la ecuación diferencial para la tensión sumando las corrientes que se alejan del nudo superior, donde cada corriente se expresa como una función de la tensión desconocida $v(t)$:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + I_0 + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

Si eliminamos la integral de la ecuación, diferenciando con respecto a t y, debido a que I_0 es una constante, obtenemos:

$$\frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{L} + C \frac{d^2v}{dt^2} = 0 \quad (1.2)$$

7.3

Ahora, dividimos la ecuación por la capacidad C y ordenamos las derivadas en orden descendente:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \quad (1.3)$$

Si comparamos esta ecuación con las ecuaciones diferenciales del tema anterior, vemos que difieren por la presencia de un término que incluye la segunda derivada. Esta ecuación es **la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes**. Los circuitos de este tema contienen bobinas y condensadores, de modo que la ecuación diferencial que describe estos circuitos es de segundo orden. Por tanto, algunas veces, estos circuitos reciben el nombre de circuitos de segundo orden.

7.4

Solución a una ecuación de segundo orden

La ecuación anterior no es posible resolverla separando las variables e integrando como se hace en las ecuaciones de primer orden. Por tanto, el método clásico para resolverla consiste en suponer que ésta es de forma exponencial, es decir, considerar a la tensión de la forma:

$$v = Ae^{st}, \quad (1.4)$$

donde A y s son constantes desconocidas. Antes de mostrar como esta suposición lleva a la solución de la ecuación, hay que demostrar que ésta es racional. Podemos advertir, que la segunda derivada de la solución de la ecuación a resolver, más una constante multiplicada por la primera derivada, más una constante multiplicada por la propia solución, deben sumar 0 para todos los valores de t .

7.5

Esto sólo puede ocurrir si las derivadas de orden superior de la solución tienen la misma forma que la solución señalada anteriormente. La función exponencial satisface este criterio. Un segundo criterio para el uso de la función exponencial corresponde a que la solución de todas las ecuaciones de primer orden obtenidas en el tema anterior son exponenciales. Parece razonable suponer que la solución de la ecuación de segundo orden también incluyen la función exponencial. Si la ecuación exponencial es una solución a la ecuación, debe satisfacer a esta misma para todos los valores de t .

7.6

La sustitución de la ecuación exponencial en $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$, nos da:

$$As^2e^{st} + \frac{As}{RC}e^{st} + \frac{Ae^{st}}{LC} = 0 \quad (1.5)$$

La ecuación anterior también se puede expresar como:

$$Ae^{st} \left(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (1.6)$$

Esta ecuación se cumple para todos los valores de t , únicamente si A es 0 o el término en paréntesis es 0, ya que e^{st} es distinto de 0 para cualquier valor finito de st .

7.7

No se puede usar $A = 0$ como una solución general debido a que al hacerlo así, implica que la tensión es 0 todo el tiempo (una imposibilidad física si hay energía en el condensador). Por tanto, para que $v = Ae^{st}$ sea una solución para la ecuación, el término entre paréntesis debe ser 0:

$$s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC} = 0 \quad (1.7)$$

Esta expresión se denomina **ecuación característica** de la ecuación diferencial debido a que las raíces de esta ecuación cuadrática determinan el carácter matemático de $v(t)$.

7.8

Las dos raíces posibles de esta expresión son:

$$s_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (1.8)$$

$$s_2 = -\frac{1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (1.9)$$

Si cualquier raíz se sustituye en $v = Ae^{st}$, la solución supuesta satisface la ecuación diferencial dada, esto es, la ecuación:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \quad (1.10)$$

7.9

En la ecuación característica, este resultado se cumple independientemente del valor de A . En consecuencia, ambas ecuaciones

$$v(t) = A_1e^{s_1t} \quad (1.11)$$

$$v(t) = A_2e^{s_2t} \quad (1.12)$$

satisfacen la ecuación $\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0$. Si llamamos estas soluciones como v_1 y v_2 , respectivamente, es posible demostrar que su suma es también una solución.

7.10

Específicamente, si se supone que $v = v_1 + v_2 = A_1e^{s_1t} + A_2e^{s_2t}$, entonces:

$$\frac{dv}{dt} = A_1s_1e^{s_1t} + A_2s_2e^{s_2t} \quad (1.13)$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = A_1s_1^2e^{s_1t} + A_2s_2^2e^{s_2t} \quad (1.14)$$

Si estas ecuaciones se sustituyen en la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, se obtiene:

$$A_1e^{s_1t} \left(s_1^2 + \frac{1}{RC}s_1 + \frac{1}{LC} \right) + A_2e^{s_2t} \left(s_2^2 + \frac{1}{RC}s_2 + \frac{1}{LC} \right) = 0 \quad (1.15)$$

7.11

Los términos entre paréntesis son 0 ya que según la definición, s_1 y s_2 son las raíces de la ecuación característica. Por tanto, podemos decir que la respuesta natural del circuito RLC en paralelo es de la forma:

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (1.16)$$

Esta ecuación es una repetición de la suposición que se hizo en la ecuación $v = v_1 + v_2$, ya que se ha demostrado que v_1 es una solución, v_2 también lo es; al igual que $v_1 + v_2$ es otra solución.

7.12

Las raíces de la ecuación característica (s_1 y s_2) están determinadas por los parámetros del circuito RLC. Las condiciones iniciales determinan los valores de A_1 y A_2 . Hay que tener en cuenta que la ecuación $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$ habría que cambiarla si s_1 y s_2 son iguales. El comportamiento de $v(t)$ depende del valor de s_1 y s_2 . En consecuencia, el primer paso en la determinación de la respuesta natural corresponde a determinar las raíces de la ecuación característica.

7.13

Utilizando una notación muy común se expresan las raíces s_1 y s_2 :

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (1.17)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (1.18)$$

donde:

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (1.19)$$

A s_1 y s_2 se conocen como las frecuencias complejas, α se denomina la **frecuencia neperiana** y ω_0 es la **frecuencia resonante**. La frecuencia neperiana y resonante se expresan en radianes por segundo (rad/s).

7.14

Existen tres posibles resultados. Primero, si $\omega_0^2 < \alpha^2$, ambas raíces serán reales y distintas. Aquí se dice que la respuesta de la tensión será sobreamortiguada. Segundo, si $\omega_0^2 > \alpha^2$, tanto s_1 como s_2 serán complejas, y además, conjugadas entre sí. En esta situación se dice que la respuesta de la tensión será subamortiguada. El tercer caso es que $\omega_0^2 = \alpha^2$. En este caso, s_1 y s_2 serán reales e iguales. En este caso, la respuesta de la tensión será amortiguada críticamente.

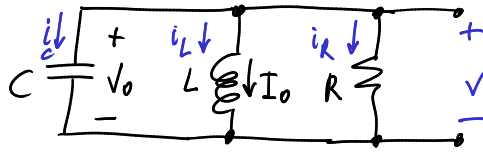
7.15

Ejemplo 8.1 a) Encontrar las raíces de la ecuación característica para:

$$R = 200 \Omega$$

$$L = 50 \text{ mH}$$

$$C = 0.2 \mu\text{F}$$



Se sustituye:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 200 \cdot 0.2 \cdot 10^{-6}} \text{ rad/s} =$$

$$= 1.25 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{50 \cdot 10^{-3} \cdot 0.2 \cdot 10^{-6}} = 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

Se sustituyen estos valores en

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -5000 \text{ rad/s} \\ -20000 \text{ rad/s} \end{cases}$$

b) ¿Qué tipo de respuesta es?

Es sobreamortiguada porque $\omega_0^2 < \alpha^2$

c) Repetir a) para $R = 312.5 \Omega$:

Cambia el valor de α :

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 312.5 \cdot 0.2 \cdot 10^{-6}} = 8000 \text{ rad/s}$$

$\alpha^2 = 64 \cdot 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}^2$. Como ω_0^2 sigue siendo lo mismo, $\omega_0^2 > \alpha^2 \Rightarrow$ subamortiguada

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \underline{\underline{-8000 \pm j6000 \text{ rad/s}}}$$

d) ¿Qué valor de R hace que la respuesta sea de amortiguamiento crítico?

Para amortiguamiento crítico,

$$\omega_0^2 = \alpha^2$$

$$\frac{1}{LC} = 10^8 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2RC} = 10^4 \text{ rad/s}$$

$$\text{Como } C = 0,2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \Rightarrow R = \frac{1}{2 \cdot 10^4 \cdot 0,2 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{250 \Omega}}$$

Respuesta de tensión sobreamortiguada

La respuesta para la tensión es de la forma:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (1.20)$$

Ahora, tenemos que tener en cuenta que:

$$v(0^+) = A_1 + A_2 \quad (1.21)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \quad (1.22)$$

Obtenemos el valor inicial de dv/dt encontrando primero, la corriente en la rama del condensador en $t = 0^+$. Por tanto,

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} \quad (1.23)$$

Usando la LCK para $t = 0^+$, se obtiene $i_C(0^+)$:

$$i_C(0^+) = -\frac{V_0}{R} - I_0 \quad (1.24)$$

El proceso para la respuesta sobreamortiguada se puede resumir en:

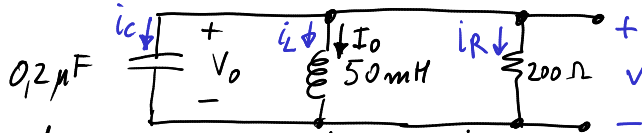
- Se encuentran las raíces de la ecuación característica, s_1 y s_2 , empleando los valores de R, L y C.
- Se determina $v(0^+)$ y $dv(0^+)/dt$ utilizando el análisis de circuitos.
- Se encuentran los valores de A_1 y A_2 resolviendo simultáneamente las siguientes ecuaciones:

$$v(0^+) = A_1 + A_2 \quad (1.25)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_C(0^+)}{C} = s_1 A_1 + s_2 A_2 \quad (1.26)$$

Se sustituyen los valores de s_1, s_2, A_1 y A_2 en la ecuación $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$, para determinar la expresión correspondiente relativa a $v(t)$ para $t \geq 0$.

Ejemplo 8.2 Para el circuito, $v(0^+) = 12V$ e $i_L(0^+) = 30mA$.



a) Encuentre la corriente inicial en cada rama del circuito.

En la bobina, $I_0 = i_L(0^+) = \underline{30mA} = i_L(0^-)$, porque no puede haber saltos repentinos.

En la resistencia, $v(0^+) = i_R(0^+)R$, por la ley de Ohm, $i_R(0^+) = \frac{v(0^+)}{200} = \frac{12}{200} = \underline{60mA}$

Usando la LCR;

$$i_C(0^+) + i_L(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+) = -30mA - 60mA \\ = \underline{-90mA}$$

b) Calcular el valor inicial de $\frac{dv}{dt}$.

Se usa $i_c = C \frac{dv}{dt}$. Si se determina $i_c(0^+)$ esto es lo mismo que $C \frac{dv}{dt} |_{t=0^+}$:

$$i_c(0^+) = 90 \text{ mA} = C \frac{dv}{dt} |_{t=0^+} \Rightarrow \frac{dv}{dt} |_{t=0^+} = \frac{90 \cdot 10^{-3}}{0.2 \cdot 10^{-6}} \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

$$\frac{dv}{dt} |_{t=0^+} = -450 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{s}}$$

c) Determinar una expresión para $v(t)$

Primero se calculan las raíces de la ec. característica. Son las mismas del Ejemplo 8.1, (a):

$$s_1 = -5000 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -20000 \text{ rad/s}$$

Se sustituye en:

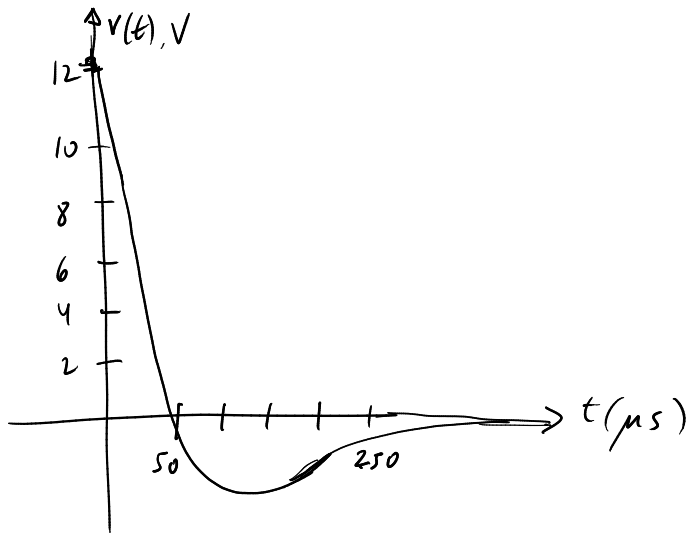
$$\left. \begin{aligned} v(0^+) &= A_1 + A_2 \\ \frac{dv(0^+)}{dt} &= s_1 A_1 + s_2 A_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} 12 &= A_1 + A_2 \\ -450 \cdot 10^3 &= -5000 A_1 - 20000 A_2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es: $A_1 = -14 \text{ V}$
 $A_2 = 26 \text{ V}$

$$v(t) = -14 e^{-5000t} + 26 e^{-20000t} \text{ V}, t \geq 0.$$

d) Dibujar $v(t)$ en el intervalo $0 \leq t \leq 25 \mu\text{s}$

Esto se puede hacer con varios programas. El más sencillo es gnuplot.



Aproximadamente, tiene esta forma.

Ejemplo 8.3 Calcular las tres corrientes de rama para el circuito del Ejemplo 8.2.

El punto de partida es que se ha calculado la tensión $v(t)$:

$$v(t) = -14e^{-5000t} + 26e^{-20000t} \text{ V, } t \geq 0.$$

La corriente en la resistencia i_R se calcula por la ley de Ohm:

$$i_R(t) = \frac{v(t)}{R} = -70e^{-5000t} + 130e^{-20000t} \text{ mA, } t \geq 0.$$

Para la corriente $i_L(t)$: dos formas de calcularla:

$$\textcircled{1} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(x) dx + I_0$$

\textcircled{2} Calcular $i_C(t)$ y usar la LCK

Usando la segunda forma:

$$i_c(t) = C \frac{dv}{dt} = 0,2 \cdot 10^{-6} \left[70000 e^{-5000t} - 520000 e^{-20000t} \right]$$
$$= (14 e^{-5000t} - 104 e^{-20000t}) \text{ mA}, \quad t \geq 0^+$$

Comprobamos que $i_c(0^+) = -90 \text{ mA}$.

Ahora,

$$i_L(t) = -i_R(t) - i_c(t) = \underline{\underline{(56 e^{-5000t} - 26 e^{-20000t}) \text{ mA}}}$$

Respuesta de tensión subamortiguada

Las raíces s_1 y s_2 son:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)}$$
$$= \alpha + j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$
$$= -\alpha + j\omega_d \quad (1.27)$$

$$s_2 = -\alpha - j\omega_d \quad (1.28)$$

donde ω_d es la **frecuencia amortiguada**:

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}. \quad (1.29)$$

7.19

La respuesta de tensión subamortiguada de un circuito RLC en paralelo es:

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sen \omega_d t \quad (1.30)$$

Esta ecuación se obtiene de $v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$. En el paso de esta ecuación a la anterior se ha usado la identidad de Euler:

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sen \theta. \quad (1.31)$$

7.20

Para demostrar este resultado, se parte de:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= A_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + A_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \\
 &= A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-\alpha t} e^{-j\omega_d t} \\
 &= e^{-\alpha t} (A_1 \cos \omega_d t + jA_1 \sin \omega_d t + A_2 \cos \omega_d t - jA_2 \sin \omega_d t) \\
 &= e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega_d t + j(A_1 - A_2) \sin \omega_d t] \quad (1.32)
 \end{aligned}$$

Sustituimos las constantes arbitrarias $A_1 + A_2$ y $j(A_1 - A_2)$ por unas nuevas constantes arbitrarias B_1 y B_2 para obtener:

$$\begin{aligned}
 v(t) &= e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t) \\
 &= B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (1.33)
 \end{aligned}$$

7.21

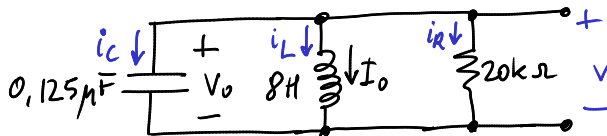
Las constantes B_1 y B_2 son reales, no complejas, ya que la tensión es una función real. En la respuesta que estamos estudiando, A_1 y A_2 son conjugadas complejas y, por ello, B_1 y B_2 son reales. Determinamos B_1 y B_2 por la energía inicial almacenada en el circuito, de la misma forma que se determinó A_1 y A_2 por la respuesta sobreamortiguada: evaluando v en $t = 0^+$ y su derivada en $t = 0^+$. Ahora, s_1, s_2, α y ω_d están fijadas por los parámetros RLC del circuito. Para la respuesta subamortiguada, las dos ecuaciones simultáneas que determinan B_1 y B_2 son:

$$v(0^+) = V_0 = B_1 \quad (1.34)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2 \quad (1.35)$$

7.22

Ejemplo 8.4 En el circuito, $V_0 = 0$ e $I_0 = -12,25 \text{ mA}$.



a) Calcular las raíces de la ecuación característica.

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 0,125 \cdot 10^{-6}} = 200 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{8 \cdot 0,125 \cdot 10^{-6}}} = 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\omega_0^2 = 10^6 \text{ rad}^2/\text{s} > 4 \cdot 10^4 \text{ rad}^2/\text{s}^2 = \alpha^2$$

$\omega_0^2 > \alpha^2 \Rightarrow$ respuesta subamortiguada

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \sqrt{10^6 - 4 \cdot 10^4} = 100\sqrt{96} = 979,80 \text{ rad/s}$$

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = \underline{\underline{-200 \pm j979,80 \text{ rad/s}}}$$

b) Calcular v y dv/dt en $t=0^+$.

$$\text{Como } V_0 = v(0^+) \Rightarrow \underline{v(0^+) = 0}$$

Para $\frac{dv}{dt}$ hace falta determinar $i_c(0^+)$. Usando la LCK:

$$i_L(0^+) + i_C(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_R(0^+) = \frac{v(0^+)}{R} = 0$$

$$i_L(0^+) = I_0 = -12,25 \text{ mA} \Rightarrow i_C(0^+) = 12,25 \text{ mA}$$

$$\begin{aligned} i_C(0^+) &= \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0^+} \Rightarrow \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} \\ &= \frac{12,25 \cdot 10^{-3}}{0,125 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{98000 \frac{V}{s}}} \end{aligned}$$

c) Calcular la tensión $v(t)$ para $t \geq 0$.

$$v(t) = e^{-\alpha t} (B_1 \cos \omega_d t + B_2 \sin \omega_d t)$$

B_1 y B_2 se obtienen de:

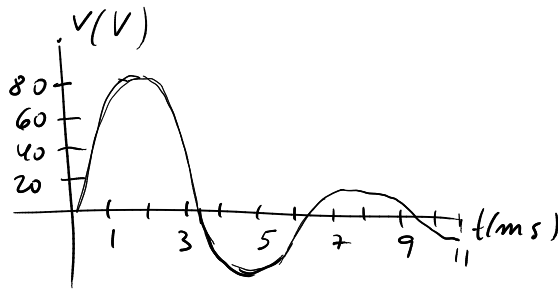
$$v(0^+) = V_0 = B_1$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{i_C(0^+)}{C} = -\alpha B_1 + \omega_d B_2$$

$$B_1 = 0 \quad \text{y} \quad B_2 = \frac{98000}{\omega_d} \approx 100 \text{ V}$$

$$v(t) = \underline{\underline{100 e^{-200t} \sin 979,8t \text{ V}, t \geq 0}}$$

a) Representar gráficamente $v(t)$ en $0 \leq t \leq 11 \text{ ms}$



¿Cómo es la forma de la respuesta subamortiguada? Primero, las funciones trigonométricas indican que la respuesta es oscilatoria; esto es, la tensión se alterna entre valores positivos y negativos. Segundo, la amplitud de la oscilación disminuye en forma exponencial. La velocidad a la cual la amplitud se reduce está determinada por α . A α se le conoce como *factor de amortiguamiento* o *coeficiente de amortiguamiento*. Esto explica por qué ω_d se denomina frecuencia amortiguada. Si no hay amortiguamiento, $\alpha = 0$ y la frecuencia de oscilación corresponde a ω_0 .

7.23

Siempre que existe un elemento disipativo, R , en el circuito, $\alpha \neq 0$ y $\omega_d < \omega_0$. De este modo, cuando $\alpha \neq 0$, se dice que la frecuencia de oscilación será amortiguada. El comportamiento oscilatorio es posible debido a los dos tipos de elementos de almacenamiento de energía en el circuito: la bobina y el condensador.

7.24

Resp. de tensión críticamente amortiguada

El circuito de segundo orden que estamos estudiando se amortigua críticamente cuando $\omega_0^2 = \alpha^2$ o $\omega_0 = \alpha$. Cuando el circuito está críticamente amortiguado, la respuesta está a punto de oscilar. Además, las dos raíces de la ecuación característica son reales e iguales; esto es:

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{1}{2RC} \quad (1.36)$$

Cuando esto ocurre, la solución para la tensión ya no toma la forma de la ecuación $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$. Esta ecuación ya no es aplicable puesto que $s_1 = s_2 = -\alpha$ y, esta misma predice que:

$$v = (A_1 + A_2) e^{-\alpha t} = A_0 e^{-\alpha t} \quad (1.37)$$

donde A_0 es una constante arbitraria.

7.25

Esta ecuación no puede satisfacer dos condiciones iniciales independientes (V_0, I_0) con sólo una constante arbitraria, A_0 . Recuérdese que los parámetros del circuito R y C fijan α . Para resolver este dilema regresamos a la suposición de que la solución toma la forma de la ecuación $v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$. Cuando las raíces de la ecuación característica son iguales, la solución para la ecuación diferencial toma una forma diferente, esto es:

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \quad (1.38)$$

En caso de una raíz repetida, la solución incluye un término exponencial simple más el producto de un término lineal y de uno exponencial.

7.26

Para determinar la solución, hay que obtener D_1 y D_2 ; para ello, utilizamos los valores iniciales de la tensión y la derivada del mismo con respecto al tiempo para escribir dos ecuaciones que contienen a D_1 y/o D_2 . Entonces, las dos ecuaciones simultáneas necesarias para determinar D_1 y D_2 son:

$$v(0^+) = V_0 = D_2 \quad (1.39)$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = \frac{i_c(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2 \quad (1.40)$$

En la respuesta críticamente amortiguada, tanto la expresión de $v(t)$ como las ecuaciones simultáneas correspondientes a D_1 y D_2 difieren de aquellas para la respuesta sobre y subamortiguada.

7.27

Es raro encontrar en la práctica sistemas críticamente amortiguados, debido a que ω_0 debe ser exactamente igual a α . Estas cantidades dependen de los parámetros de los circuitos, y en un circuito real es muy difícil que $\omega_0 = \alpha$. En la práctica, hay que ajustar manualmente un circuito para llegar a esta condición.

7.28

Ejemplo 8.5 a) Para el circuito del Ejemplo 8.4, calcular el valor de R que hace que la respuesta sea de amortiguamiento crítico.

Sabiendo que $\omega_0^2 = 10^6 \text{ rad}^2/\text{s}$,

$$\omega_0^2 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 \Rightarrow \alpha = 10^3 = \frac{1}{2RC}$$

$$R = \frac{1}{2000 \cdot 0,125 \cdot 10^{-6}} = \underline{\underline{4000 \Omega}}$$

b) Calcular $v(t)$ para $t \geq 0$

Usando los valores de $v(0^+)$ y $\frac{dv}{dt}/t=0^+$, ahora

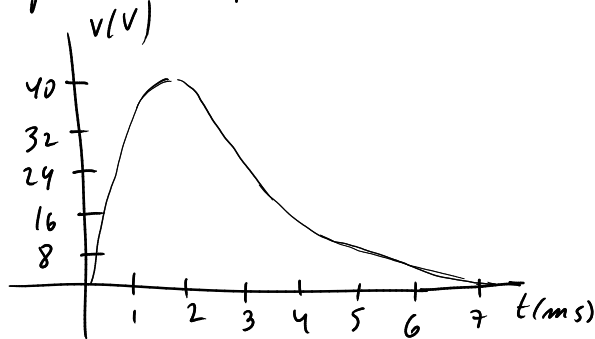
$$v(0^+) = V_0 = D_2$$

$$\frac{dv}{dt}/t=0^+ = \frac{i_c(0^+)}{C} = D_1 - \alpha D_2$$

$$D_2 = 0 \quad \text{y} \quad D_1 = 98000 \frac{V}{s}$$

$$v(t) = 98000t e^{-1000t}$$

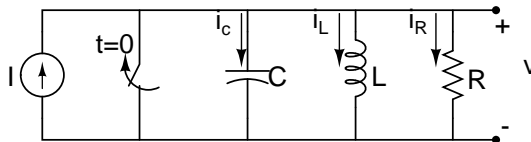
c) Dibujar $v(t)$ para $0 \leq t \leq 7 \text{ ms}$:



2. Respuesta escalón de un circuito RLC en paralelo

Resp. escalón

La obtención de la respuesta al escalón de un circuito RLC en paralelo implica determinar la tensión a través de las ramas paralelas o la corriente en las ramas individuales como consecuencia de una aplicación repentina de una fuente de corriente continua. Tal vez puede haber o no energía almacenada en el circuito cuando se aplica la fuente. Esto se representa en el siguiente circuito:



Para desarrollar el método para calcular la respuesta escalón es necesario obtener la corriente en la rama de la bobina (i_L).

7.29

Esta corriente es interesante porque no se acerca a 0 cuando t aumenta. Más bien, después de que el interruptor ha estado abierto durante mucho tiempo, la corriente de la bobina es igual a la corriente I de la fuente continua. Para determinar la respuesta escalón, suponemos que la energía inicial almacenada en el circuito es 0. Esta suposición simplifica los cálculos y no altera el proceso. Para encontrar la corriente de la bobina i_L , debemos resolver una ecuación diferencial de segundo orden igual a la función forzada I , que se obtiene a partir de la ley de la corriente de Kirchhoff:

$$i_L + i_R + i_C = I. \quad (2.1)$$

Simplificando,

$$i_L + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = I. \quad (2.2)$$

7.30

Método indirecto

Se puede resolver la ecuación respecto a i_L , determinando primero la tensión v . Regresamos a la ecuación:

$$i_L + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = I \tag{2.3}$$

y se expresa i_L como una función de v , de tal modo:

$$\frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = I \tag{2.4}$$

Derivando, el lado derecho de la igualdad es 0, puesto que I es constante. Así,

$$\frac{v}{L} + \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} + C \frac{d^2v}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \tag{2.5}$$

7.31

Debido a que hay una fuente en el circuito para $t \geq 0$, debe tomarse en cuenta el valor de la corriente en $t = 0^+$ cuando se evalúen los coeficientes en las expresiones:

$$v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \tag{2.6}$$

$$v(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sen \omega_d t \tag{2.7}$$

$$v(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \tag{2.8}$$

Estas expresiones son las posibles soluciones de la ecuación diferencial para los tres casos de las raíces de la ecuación característica, ya que el valor de v depende de estas raíces.

7.32

Para calcular i_L , sustituimos estas tres soluciones en $i_L + \frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt} = I$:

$$i_L(t) = I + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t} \tag{2.9}$$

$$i_L(t) = I + B'_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t} \sen \omega_d t \tag{2.10}$$

$$i_L(t) = I + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t} \tag{2.11}$$

donde $A'_1, A'_2, B'_1, B'_2, D'_1$ y D'_2 son constantes arbitrarias. En cada caso, las constantes primas pueden calcularse indirectamente en términos de las constantes arbitrarias asociadas con la solución de la tensión pero esos cálculos no son sencillos.

7.33

Método directo

Resulta más fácil calcular las constantes primas directamente en términos de los valores iniciales de la función de respuesta. Para el circuito que se está analizando, encontramos las constantes primas a partir de $i_L(0)$ y di_L/dt . La solución para una ecuación diferencial de segundo orden con una función forzada constante es igual a la respuesta forzada más una función de respuesta idéntica en forma a la respuesta natural. De este modo, es posible escribir la solución para la respuesta escalón en una de las dos formas:

$$i(t) = I_f + \left\{ \begin{array}{l} \text{función de la misma forma} \\ \text{que la respuesta natural} \end{array} \right\},$$

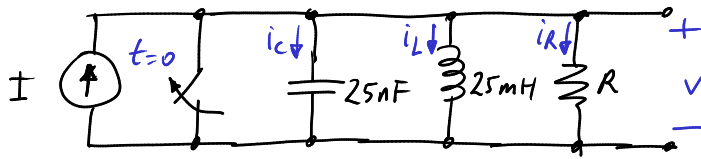
o también

$$v(t) = V_f + \left\{ \begin{array}{l} \text{función de la misma forma} \\ \text{que la respuesta natural} \end{array} \right\},$$

donde I_f y V_f representan el valor final de la función de respuesta. El valor final tal vez sea 0.

7.34

Ejemplo 8.6 La energía inicial almacenada en el circuito es cero. En $t=0$ la fuente aplica 24mA .
 $R = 400\ \Omega$.



a) ¿Cuál es el valor inicial de i_L ?

Como no hay energía inicial en el circuito, $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 0$

b) ¿Cuál es el valor inicial de di_L/dt ?

Antes de que abra el interruptor, $v(0^-) = 0$, por lo que $v(0^+) = v(0^-) = 0$. Ahora se

usa que
$$v = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow \frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0$$

c) ¿Cuáles son las raíces de la ecuación característica?

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{25 \cdot 10^{-3} \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 16 \cdot 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2.$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} = \frac{1}{2 \cdot 400 \cdot 25 \cdot 10^{-9}} = 5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}.$$

$$\alpha^2 = 25 \cdot 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2.$$

Como $\omega_0^2 > \alpha^2 \Rightarrow$ respuesta sobreamortiguada:

$$s_1 = -5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^4 = -20000 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -5 \cdot 10^4 - 3 \cdot 10^4 = -80000 \text{ rad/s}$$

d) Expresión de $i_L(t)$:

$$i_L(t) = I_f + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$i_L(0^+) = I_f + A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{di_L}{dt} \Big|_{t=0^+} = s_1 A_1 + s_2 A_2 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$A_1' = -32 \text{ mA} \quad \text{y} \quad A_2' = 8 \text{ mA}$$
$$i_L(t) = \underline{\underline{(24 - 32 e^{-20000t} + 8 e^{-80000t}) \text{ mA} \quad , \quad t \geq 0}}$$

Ejemplo 8.7 Se aumenta el valor de la resistencia R hasta 625Ω . Calcular $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

L y C son los mismos. Ahora $\alpha = 3,2 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$.
Con $\omega_0^2 > \alpha^2$ y las raíces de la ecuación característica son complejas:

$$s_1 = -3,2 \cdot 10^4 + j 2,4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -3,2 \cdot 10^4 - j 2,4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

La respuesta es subamortiguada:

$$i_L(t) = I_f + B_1' e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2' e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

B'_1 y B'_2 se determinan con:

$$\begin{cases} i_L(0^+) = I_f + B'_1 = 0 \\ \frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = \omega_d B'_2 - \alpha B'_1 = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} B'_1 = -24 \text{ mA} \\ B'_2 = -32 \text{ mA} \end{array} \right.$$

$$i_L(t) = (24 - 24 e^{-32000t} \cos 24000t - 32 e^{-32000t} \sin 24000t) \text{ mA}, t \geq 0.$$

Ejemplo 8.8 La resistencia cambia su valor a 500Ω
Calcular $i_L(t)$ para $t \geq 0$.

$\omega_0^2 = 16 \cdot 10^8 \text{ rad/s}$, igual que antes.

Si $R = 500 \Omega \rightarrow \alpha = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, que corresponde al caso de amortiguamiento crítico.

$$i_L(t) = I_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}$$

D'_1 y D'_2 se calculan a partir de las condiciones iniciales:

$$i_L(0^+) = I_f + D'_2 = 0 \quad \left(\begin{array}{l} D'_1 = -960000 \text{ mA/s} \\ D'_2 = -24 \text{ mA} \end{array} \right.$$

$$\frac{di_L}{dt}\bigg|_{t=0^+} = D'_1 - \alpha D'_2 = 0$$

$$i_L(t) = (24 - 960000 e^{-40000t} - 24 e^{-40000t}) \text{ mA}, t \geq 0$$

Ejemplo 8.10 Hay energía almacenada en el circuito con $R=500\ \Omega$ tras mover el interruptor. La corriente inicial en la bobina es de 29 mA y la tensión inicial es de 50 V en el condensador.

Calcular : a) $i_L(t)$

Tiene que ser 29 mA , porque no puede haber saltos de corriente.

b) $\frac{di_L}{dt} / t=0 \rightarrow$ se utiliza $50 = L \frac{di_L}{dt} / t=0^+$

$$\frac{di_L}{dt} / t=0^+ = \frac{50}{25} \cdot 10^3 = 2000\text{ A/s}$$

c) $i_L(t)$ para $t \geq 0$

$$i_L(t) = I_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t}$$

$$I_f = 29\text{ mA} \quad \alpha = \frac{1}{2RC} = 40000\text{ rad/s}$$

$$i_L(0) = I_f + D'_2 = 29\text{ mA} \Rightarrow D'_2 = 5\text{ mA}$$

$$\frac{di_L}{dt} / t=0^+ = D'_1 - \alpha D'_2 = 2000 \Rightarrow D'_1 = 2,2 \cdot 10^6\text{ mA/s}$$

$$i_L(t) = (29 + 2,2 \cdot 10^6 t e^{-40000t} + 5 e^{-40000t})\text{ mA}, t \geq 0.$$

d) $v(t)$ para $t \geq 0$

A partir de $v(t) = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow$

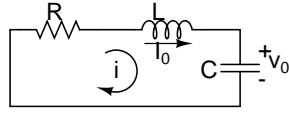
$$v(t) = -2,2 \cdot 10^6 t e^{-40000t} + 50 e^{-40000t}\text{ V}, t \geq 0$$

Cumple que $v(0) = 50$

3. Respuesta natural y escalón de un circuito RLC en serie

Respuesta natural y escalón

Los métodos para calcular la respuesta natural y escalón de un circuito RLC en serie son los mismos que se han utilizado para un circuito RLC en paralelo. Empezamos sumando las tensiones alrededor de la trayectoria cerrada en el circuito que se muestra a continuación:



Con este circuito podemos decir:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + V_0 = 0 \quad (3.1)$$

7.35

Después, derivamos con respecto a t y obtenemos:

$$R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \quad (3.2)$$

y esta ecuación la podemos simplificar:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (3.3)$$

Vemos que esta ecuación tiene la misma forma que la de un circuito RLC en paralelo $\left(\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0 \right)$, con lo cual, podemos seguir el mismo procedimiento. La ecuación característica para un circuito RLC en serie es:

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (3.4)$$

7.36

Las raíces de la ecuación característica son:

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (3.5)$$

o bien,

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (3.6)$$

La frecuencia neperiana (α) para el circuito RLC en serie es:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \text{ rad/s} \quad (3.7)$$

La expresión para la frecuencia resonante es igual a:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s} \quad (3.8)$$

7.37

Una cuestión importante es que la frecuencia neperiana de un circuito RLC en serie es diferente de un circuito RLC en paralelo, aunque **las frecuencias resonantes son las mismas** para ambos tipos de circuitos. La respuesta de la corriente estará sobreamortiguada, subamortiguada o críticamente amortiguada de acuerdo con que si $\omega_0^2 < \alpha^2$, $\omega_0^2 > \alpha^2$ u $\omega_0^2 = \alpha^2$ respectivamente. Por tanto, las tres posibles soluciones para la corriente son:

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad (\text{sobreamort}) \quad (3.9)$$

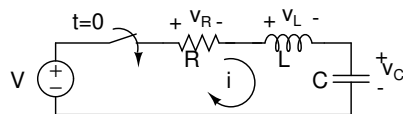
$$i(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \text{sen } \omega_d t \quad (\text{subamort}) \quad (3.10)$$

$$i(t) = D_1 t e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \quad (\text{críticamente amort}) \quad (3.11)$$

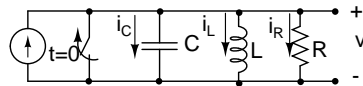
Una vez obtenida la respuesta de corriente natural, se puede calcular la respuesta de tensión natural en cualquier elemento del circuito.

7.38

Para verificar que el procedimiento para determinar la respuesta escalón de un circuito RLC en serie es la misma que la del circuito RLC en paralelo, demostramos que la ecuación diferencial que describe la tensión del condensador del circuito:



tiene la misma forma que la ecuación diferencial que describe la corriente de la bobina en el circuito:



7.39

Por conveniencia, suponemos que no hay energía almacenada en el circuito en el instante que el interruptor se cierra. La aplicación de la ley de la tensión de Kirchoff en el circuito RLC en serie da:

$$V = Ri + L \frac{di}{dt} + v_c \quad (3.12)$$

La corriente i se relaciona con la tensión de la capacidad (v_c) mediante la expresión:

$$i = C \frac{dv_c}{dt} \quad (3.13)$$

de la que se obtiene:

$$\frac{di}{dt} = C \frac{d^2 v_c}{dt^2} \quad (3.14)$$

7.40

Sustituyendo las dos ecuaciones anteriores en la ecuación resultante de aplicar la ley de Kirchoff de la tensión se obtiene:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{LC} = \frac{V}{LC} \quad (3.15)$$

Esta ecuación tiene la misma forma que la del circuito RLC en paralelo $\left(\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{I}{LC} \right)$, y por consiguiente el método para determinar v_c es el mismo que para calcular i_L .

7.41

Las tres soluciones posibles para v_c son:

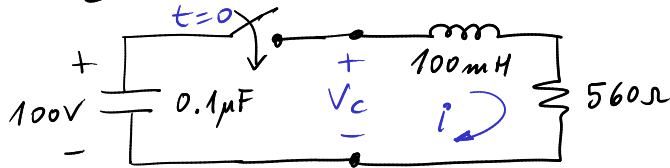
$$v_c = V_f + A'_1 e^{s_1 t} + A'_2 e^{s_2 t} \quad (\text{sobreamort}) \quad (3.16)$$

$$v_c = V_f + B'_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B'_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (\text{subamort}) \quad (3.17)$$

$$v_c = V_f + D'_1 t e^{-\alpha t} + D'_2 e^{-\alpha t} \quad (\text{críticamente amort}) \quad (3.18)$$

donde V_f es el valor final de v_c . En consecuencia, según el circuito, el valor final v_c es la tensión V de la fuente de continua.

Ejemplo 8.11 El condensador está cargado con una tensión de 100V. En $t=0$ se descarga a través de una combinación en serie RLC.



a) Calcular $i(t)$ para $t \geq 0$.

Para este circuito, $\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{560}{2 \cdot 0,1} = 2800 \text{ rad/s}$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{0,1 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}} = 10^8 \text{ rad}^2/\text{s}^2$$

$$\omega_0^2 = 10^8 > 0,0784 \cdot 10^8 = \alpha^2$$

La respuesta es subamortiguada.

$$i(t) = B_1 e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$\alpha = 2800 \text{ rad/s} \quad \gamma \quad \omega_d = 9600 \text{ rad/s}$$

$$i(0) = B_1 = 0.$$

$$V_0 = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = \frac{V_0}{L} = \frac{100}{100 \cdot 10^{-3}} = 1000 \text{ A/s}$$

$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0^+} = B_2 \cdot 9600 = 1000 \Rightarrow B_2 = \frac{1000}{9600} \approx 0.1042 \text{ A}$$

$$i(t) = 0.1042 e^{-2800t} \sin 9600t \text{ A}, \quad t \geq 0$$

b) Calcular $v_c(t)$ para $t \geq 0$.

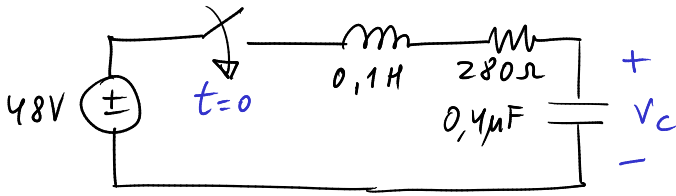
Se pueden utilizar cualquiera de las dos expresiones:

$$v_c(t) = -\frac{1}{C} \int_0^t i(x) dx + 100$$

$$v_c(t) = iR + L \frac{di}{dt} \quad \leftarrow \text{Recomendada}$$

$$v_c(t) = (100 \cos 9600t + 29.17 \sin 9600t) e^{-2800t} \quad V, \quad t \geq 0$$

Ejemplo 8.12 No hay energía almacenada en la bobina de 100 mH o en el condensador de 0,4 μF cuando se cierra el interruptor. Calcular $V_c(t)$ para $t \geq 0$.



Las raíces de la ecuación característica son:

$$s_1 = -\frac{280}{0,2} + \sqrt{\left(\frac{280}{0,2}\right)^2 - \frac{10^6}{0,1 \cdot 0,4}} = -1400 + j4800 \text{ rad/s}$$

$$s_2 = -1400 - j4800 \text{ rad/s}$$

La respuesta está subamortiguada.

$$V_c(t) = 48 + B'_1 e^{-1400t} \cos 4800t +$$

$$B'_2 e^{-1400t} \sin 4800t, \quad t \geq 0.$$

En el circuito no hay energía almacenada, con lo que

$$V_c(0^+) = 0 = 48 + B'_1, \quad \left. \begin{array}{l} B'_1 = -48 \text{ V} \\ B'_2 = -14 \text{ V} \end{array} \right\}$$

$$\frac{dV_c}{dt} \Big|_{t=0^+} = 0 = 4800B'_2 - 1400B'_1$$

$$V_c(t) = (48 - 48e^{-1400t} \cos 4800t - 14e^{-1400t} \sin 4800t) \text{ V}, \quad t \geq 0$$