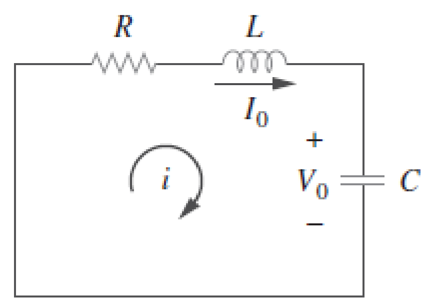
1) Una compañía de dispositivos electrónicos realiza pruebas para mejorar la calidad de sus productos, y quiere determinar la carga en el capacitor de un circuito LRC en serie cuando L=0.5 H, R=10 Ω, C=0.001 F, E(t)=150 V, q(0)=1 C, i(0)=0 A, Cuáles son las funciones de carga y de corriente del circuito.

Respuesta:

Las funciones de carga y de corriente del están compuestas por la respuesta natural (homogénea) y la respuesta forzada (particular o permanente):

$$i_{(t)} = i_{h(t)} + i_{p(t)}$$

Para estudiar la respuesta homogénea, consideramos el circuito RLC de la Figura 1. Este circuito se excita con la energía inicialmente almacenada en el capacitor y el inductor:



Circuito *RLC* en serie sin fuente.

Dónde:

$$i_{(0)} = I_{(0)} = 0$$

$$q_{(0)} = CV_{(0)} = 1$$
$$V_{(0)} = \frac{1}{C} = \frac{1}{10^{-3}} = 1000$$

Al aplicar LVK al circuito de la Figura 1, obtenemos:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_{(\tau)}\, d\tau = 0 \quad (1)$$

En el tiempo ***t*=*0 s***, la ecuación (1) se puede escribir como:

$$Ri_{(0)} + L\frac{di_{(0)}}{dt} + V_{(0)} = 0$$

De donde:

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -\frac{1}{L}\left(Ri_{(0)} + V_{(0)}\right) = -\frac{1}{(5.10^{-1})}\left(R.0 + V_{(0)}\right)$$

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -2000$$

Para eliminar la integral de la ecuación (1) derivamos con respecto a la variable ***t***:

$$R\frac{di}{dt}+L\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{i}{C}=0 \quad (2)$$

Ordenamos la ecuación (2) para obtener la forma estándar:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di}{dt}+\frac{i}{LC}=0 \quad (3)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (3) obtenemos:

$$\frac{d^2i}{dt^2}+20\frac{di}{dt}+2000i=0 \quad (4)$$

Con la ecuación (4) formamos un polinomio $\boldsymbol{D}$ en función de una variable $\boldsymbol{p}$:

$$D_{(p)}.\,i_{(t)}=0$$

$$(p^2+20p+2000)i=0$$

$$p^2+20p+2000=0 \quad (5)$$

El polinomio de la ecuación (5) es denominado ecuación característica. Hallamos las raíces de la ecuación (5):

$$p_1=-10+43.59j$$

$$p_2=-10-43.59j$$

Estas raíces generan soluciones sinusoidales que decrecen exponencialmente de la forma: Para cada par de raíces complejas conjugadas simples del tipo $\alpha \pm j\beta$ aparecerá en la solución un término de la forma:

$$(C_1 sen\beta t+C_2 cos\beta t)e^{\alpha t}$$

Por tanto:

$$i_{h(t)}=C_1 sen 43.5te^{-10t}+C_2 cos 43.5te^{-10t}$$

En el estado permanente el capacitor se comporta como un corto, por lo que:

$$i_{p(t)}\cong 0$$

Por tanto:

$$i_{(t)}=i_{h(t)}+i_{p(t)}=C_1 sen 43.5te^{-10t}+C_2 cos 43.5te^{-10t}$$

Para hallar el valor de las constantes, utilizamos las condiciones iniciales:

$$i_{(0)}=C_1 sen 0e^{-10(0)}+C_2 cos 0e^{-10(0)}=C_2=0$$

$$\frac{di_{(t)}}{dt} = -10e^{-10t}(C_1 sen43.5t + C_2 cos43.5t) + e^{-10t}(C_1 cos43.5t - C_2 sen43.5t)$$

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -2000$$

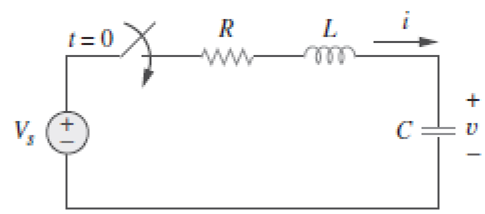
$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -10e^{-10(0)}(C_1 sen0 + C_2 cos0) + e^{-10(0)}(C_1 cos0 - C_2 sen0)$$

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -10C_2 + C_1 = -2000$$

$$C_1 = -2000$$

$$\boldsymbol{i_{(t)} = (-2000sen43.5te^{-10t})U_{(t)}} \quad (\mathbf{6})$$

Donde $\boldsymbol{U_{(t)}}$ es la función escalón unitario. Una vez determinada la expresión para la corriente, debemos considerar el circuito de la Figura 2 para hallar el voltaje $\boldsymbol{V_c}$ en el capacitor:



Tensión de escalón aplicada a un circuito *RLC* en serie.

Figura 2.

Al aplicar LVK al circuito de la Figura 2, obtenemos:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + V_C = 150 \quad (7)$$

Necesitamos la derivada de la corriente:

$$\frac{di}{dt} = \frac{d(-2000sen43.5te^{-10t})}{dt} = -2000e^{-10t}[(-10)sen43.5 + 43.5cos43.5t]$$

$$\frac{di}{dt} = [20000sen43.5 - 87000cos43.5t]e^{-10t}$$

Despejamos $\boldsymbol{V_c}$ de la ecuación (7):

$$V_C = 150 - \left(10i + 0.5\frac{di}{dt}\right)$$

$$10i = 10(-2000sen43.5te^{-10t}) = -20000sen43.5te^{-10t}$$

$$0.5\frac{di}{dt} = 0.5([20000sen43.5 - 87000cos43.5t]e^{-10t}) = [10000sen43.5 - 43500cos43.5t]e^{-10t}$$

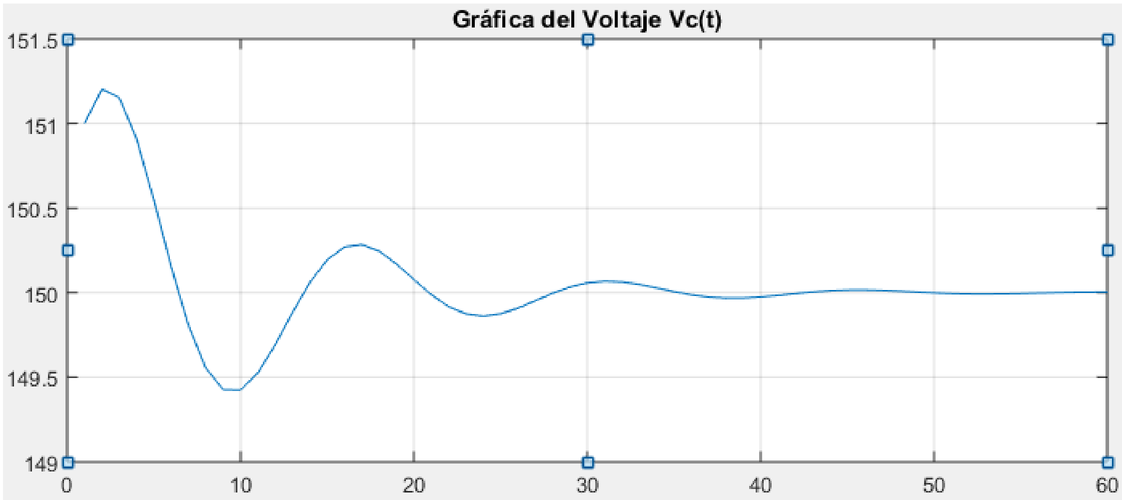
$$10i + 0.5\frac{di}{dt} = [-10000sen43.5t - 43500cos43.5t]e^{-10t}$$

$$V_C = 150 - [-10000sen43.5t - 43500cos43.5t]e^{-10t}$$

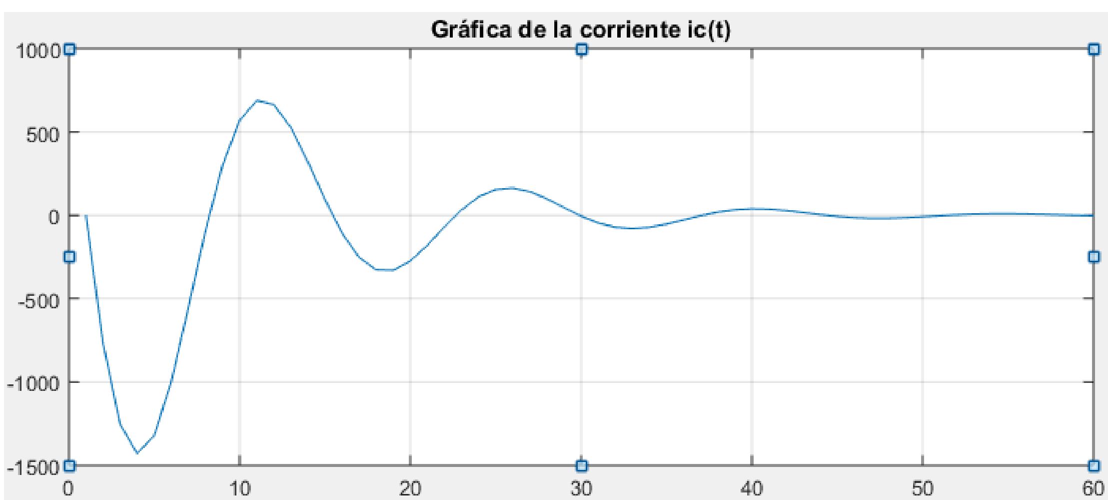
En definitiva:

$$V_{C(t)} = (150 + [10000sen43.5t + 43500cos43.5t]e^{-10t})U_{(t)}$$

A continuación las gráficas para $\boldsymbol{i_{c(t)}}$ y $\boldsymbol{V_{c(t)}}$:



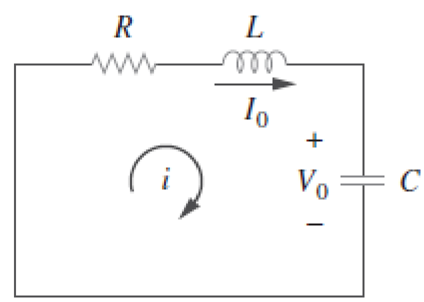
El voltaje en el capacitor oscila alrededor de 150 V, luego esa oscilación, que es el comportamiento natural del sistema, desaparece, y sólo queda la respuesta en estado estable, que es cuando el voltaje del capacitor es igual al voltaje de la fuente.



La corriente en le capacitor oscila en su etapa de transición (respuesta natural). Podemos ver que al principio es cero como lo señala la condición inicial. Luego de oscilar se estabiliza en cero, que es cuando el capacitor se ha cargado y actúa como un circuito abierto.

2) Una compañía de dispositivos electrónicos realiza pruebas para mejorar la calidad de sus productos, y en un circuito sencillo la resistencia es 20 Ω y la inductancia es de 0.25 H, C=1/300 F. Si E(t)=0 V, q(0)=4 C, i(0)=0, el interruptor se cierra, encontrar:
   a. Las funciones q(t), i(t).
   b. i, q después de 2 segundos

Respuesta:



Circuito *RLC* en serie sin fuente.

Dónde:

$$i_{(0)} = I_{(0)} = 0$$

$$q_{(0)} = CV_{(0)} = 4$$

$$V_{(0)} = \frac{1}{C} = 300$$

Al aplicar LVK al circuito de la Figura 1, obtenemos:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_{(\tau)}\, d\tau = 0 \quad (1)$$

En el tiempo ***t=0 s***, la ecuación (1) se puede escribir como:

$$Ri_{(0)} + L\frac{di_{(0)}}{dt} + V_{(0)} = 0$$

De donde:

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -\frac{1}{L}\left(Ri_{(0)} + V_{(0)}\right) = -\frac{1}{(5.10^{-1})}\left(R.0 + V_{(0)}\right)$$

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -300$$

Para eliminar la integral de la ecuación (1) derivamos con respecto a la variable ***t***:

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{C} = 0 \quad (2)$$

Ordenamos la ecuación (2) para obtener la forma estándar:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0 \quad (3)$$

Sustituyendo valores en la ecuación (3) obtenemos:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 80\frac{di}{dt} + 1200i = 0 \quad (4)$$

Con la ecuación (4) formamos un polinomio ***D*** en función de una variable ***p***:

$$D_{(p)}.\, i_{(t)} = 0$$

$$(p^2 + 80p + 1200)i = 0$$

$$p^2 + 80p + 1200 = 0 \quad (5)$$

El polinomio de la ecuación (5) es denominado ecuación característica. Hallamos las raíces de la ecuación (5):

$$p_1 = -60$$

$$p_2 = -80$$

Estas raíces generan soluciones exponenciales de la forma: Para cada ***raíz i*** real simple aparecerá en la solución un término de la forma:

$$A_i e^{r_i t}$$

Por tanto:

$$i_{h(t)} = A_1 e^{-60t} + A_2 e^{-80t}$$

En el estado permanente el capacitor se comporta como un corto, por lo que:

$$i_{p(t)} \cong 0$$

Por tanto:

$$i_{(t)} = i_{h(t)} + i_{p(t)} = A_1 e^{-60t} + A_2 e^{-80t}$$

Para hallar el valor de las constantes, utilizamos las condiciones iniciales:

$$i_{(0)} = A_1 e^{-60(0)} + A_2 e^{-80(0)} = A_1 + A_2 = 0$$

$$\frac{di_{(t)}}{dt} = -60A_1 e^{-60t} - 80A_2 e^{-80t}$$

$$\frac{di_{(0)}}{dt} = -60A_1 - 80A_2 = -300$$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales:

$$A_1 + A_2 = 0$$
$$60A_1 + 80A_2 = 300$$

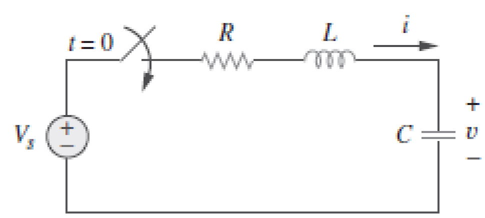
De donde obtenemos que:

$$A_1 = -15; \quad A_2 = 15$$

Por lo tanto:

$$\boldsymbol{i_{(t)}} = (-15e^{-60t} + 15e^{-80t})\boldsymbol{U_{(t)}} \;\; \mathbf{(6)}$$

Luego:



Tensión de escalón aplicada a un circuito *RLC* en serie.

$$Ri + L\frac{di}{dt} + V_C = 0 \quad (7)$$

Necesitamos la derivada de la corriente:

$$\frac{di_{(t)}}{dt} = -60A_1e^{-60t} - 80A_2e^{-80t}$$

Es decir:

$$\frac{di_{(t)}}{dt} = 900e^{-60t} - 1200e^{-80t}$$

Luego:

$$V_C = -\left(Ri + L\frac{di}{dt}\right) = -(20(-15e^{-60t} + 15e^{-80t}) + 0.25(900e^{-60t} - 1200e^{-80t}))$$

$$V_C = -(-300e^{-60t} + 300e^{-80t} + 225e^{-60t} - 300e^{-80t})$$

De donde:

$$\boldsymbol{V_{C(t)} = (75e^{-60t})U_{(t)}} \;\; \mathbf{(8)}$$

Luego:

$$q_{(t)} = CV_{c(t)} = \frac{1}{300}(75e^{-60t})$$

De donde:

$$\boldsymbol{q_{(t)} = (0.25e^{-60t})U_{(t)}} \quad \mathbf{(9)}$$

A los dos segundos:

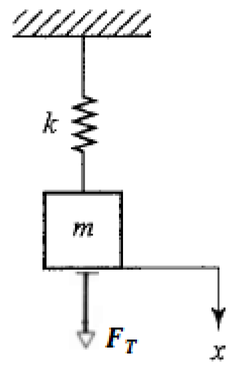
$$i_{(2)} = -15e^{-60(2)} + 15e^{-80(2)} = -1.15 * 10^{-51} + 4.88 * 10^{-69} \cong 0$$
$$q_{(2)} = 0.25e^{-60(2)} \cong 0$$

Se puede decir que después de los dos segundos tanto $\boldsymbol{i_{(t)}}$ como $\boldsymbol{q_{(t)}}$ valen cero.

3) En una fábrica de básculas se realizan pruebas para mejorar la calidad, una masa de 3 kilogramos está unida al extremo de un resorte estirado 20 centímetros por una fuerza de 15 Newtons. Es puesto en movimiento en posición inicial x=0 y velocidad inicial de -10 m/s
   a. Encuentre la ecuación que describe el movimiento x(t)
   b. Calcule la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento
   c. Calcule la posición, velocidad y aceleración del cuerpo 1 segundos después de iniciado el movimiento.

Respuesta:

Una **báscula** es un instrumento técnico diseñado para calibrar el peso de una masa. En la primera etapa del problema el resorte está estirado 20 cm, con una masa de 3 Kg en su extremo, sometido a una fuerza de 15 N, como en la Figura 1:



El resorte está sometido a la acción de dos fuerzas: la fuerza F_1=15 N, y la fuerza F_2 del peso de la masa de 3 Kg, es decir:

$$F_T = F_1 + F_2 = 15\ \mathrm{N} + \mathrm{m.g} = 15\mathrm{N} + (3\ \mathrm{Kg})\left(9.8\frac{\mathrm{m}}{s^2}\right) = 15N + 29.4N$$

$$F_T = 44.4\ N$$

Por la Ley de Hooke sabemos que el resorte se estira ***x=20 cm*** bajo la acción de estas dos fuerzas y según la fórmula siguiente:

$$F_T = kx$$

De donde obtenemos el valor de la constante ***k***:

$$k = \frac{F_T}{x} = \frac{44.4\ N}{0.2\ m}$$

$$\boldsymbol{k = 222\ N/m}$$

En la segunda etapa del problema el resorte es puesto en movimiento en la posición inicial ***x=0*** y con velocidad inicial ***v_o=-10 m/s***. Suponiendo que el desplazamiento es positivo hacia abajo, acudimos a la segunda ley de Newton:

$$\sum F = m\frac{d^2x_{(t)}}{dt^2}$$

Dónde:

$$\sum F = -kx_{(t)} + F_1 : sumatoria\ de\ fuerzas\ sobre\ el\ resorte$$

Por lo tanto:

$$-\boldsymbol{kx_{(t)}} + \boldsymbol{F_1} = \boldsymbol{m}\frac{\boldsymbol{d^2x_{(t)}}}{\boldsymbol{dt^2}}$$

Aplicamos transformada de Laplace:

$$-kX_{(s)} + F_{(s)} = m\left(s^2X_{(s)} - sx_{(0)} - x'_{(0)}\right) = ms^2X_{(s)} - m$$

Pero sabemos del enunciado que:

$$x_{(0)} = 0\ m; \quad x'_{(0)} = -10\ m/s$$

Sustituyendo:

$$-222X_{(s)} + 15 = 3\left(s^2X_{(s)} + 10\right) = 3s^2X_{(s)} + 30$$

Despejamos $X_{(s)}$:

$$X_{(s)}(3s^2 + 222) = -15$$
$$X_{(s)} = \frac{-5}{s^2 + 74}$$

Para aplicar la antitransformada consideramos la siguiente tabla:

Señal	Onda	Transformada
Sinusoide	$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2+\beta^2}$

Entonces:

$$X_{(s)} = \frac{-5}{s^2 + 74} = \left(\frac{-5}{8.6}\right)\frac{8.6}{s^2 + (8.6)^2} = -0.58\frac{8.6}{s^2 + (8.6)^2}$$

Aplicando la antitransformada de Laplace obtenemos $\boldsymbol{x_{(t)}}$:

$$\boldsymbol{x_{(t)}} = \boldsymbol{-0.58sen(8.6t)} \ \ (1)$$

Podemos ver en la ecuación (1) que el desplazamiento del resorte es una oscilación infinita. Esto sucede porque no el sistema no tiene, idealmente, amortiguación. De la ecuación (1) podemos obtener los siguientes datos:

$$\boldsymbol{A = 0.58} \quad amplitud\ del\ movimiento$$
$$\omega = 8.6 \quad velocidad\ angular$$
$$\omega = 2\pi/T$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8.6}$$
$$\boldsymbol{T = 0.73\ \ s} \quad período\ del\ movimiento$$
$$f = 1/T$$
$$\boldsymbol{f = 1.37\ \ Hz} \quad frecuencia\ del\ movimiento$$

Para encontrar la posición en t= 1 s, sustituimos este valor en la ecuación (1):

$$x_{(1)} = -0.58sen(8.6)$$
$$\boldsymbol{x_{(1)} = -8.67\ cm}$$

El signo negativo del resultado anterior indica que el resorte se ha movido hacia arriba. Para encontrar la velocidad $\boldsymbol{v_{(t)}}$ en ***t= 1 s*** , derivamos la ecuación (1):

$$v_{(t)} = \frac{dx_{(t)}}{dt} = -0.58(8.6)cos(8.6t) = -4.988cos(8.6t) \quad (2)$$
$$v_{(1)} = -4.988cos(8.6)$$
$$\boldsymbol{v_{(1)} = -4.93\ m/s}$$

El signo negativo del resultado anterior indica que el resorte se mueve hacia arriba. Para encontrar la aceleración $\boldsymbol{a_{(t)}}$ en ***t= 1 s*** , derivamos la ecuación (2):

$$a_{(t)} = \frac{d^2x_{(t)}}{dt^2} = -4.988(-8.6)sen(8.6t) = 42.89cos(8.6t)$$
$$a_{(1)} = 42.89cos(8.6)$$
$$\boldsymbol{a_{(1)} = 42.41\ m/s^2}$$