

UOC – SIS II - EJERCICIOS RESUELTOS MODULO 3

La Transformada Discreta de Fourier

Enunciados

1. Calcula la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de cada una de las siguientes secuencias $x[n]$ (observación: denotamos $x_n = x[n]$):

a) $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

b) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

c) $x_0 = 3$, $x_1 = -1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 2$.

d) $x_0 = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$.

2. Dada la secuencia de longitud $N = 4$, definida por $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)$ para $n = 0,1,2,3$ calcula su Transformada Discreta de Fourier (DFT).

3. Calcula la Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT) de las secuencias:

a) $X = (0,2)$

b) $X = (0, -2j, 0, 2j)$.

c) $X = (0,4,0,0,0,0,4)$.

4. Calcula la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia:

$$x_0 = 3 + 2j, \quad x_1 = 12j, \quad x_2 = 1 - j, \quad x_3 = -1 - j.$$

5. Calcula la transformada discreta inversa de Fourier (IDFT) de la secuencia:

$$X_0 = j, \quad X_1 = 1 + j, \quad X_2 = 2 - 2j, \quad X_3 = 3 + j.$$

6. Dadas las siguientes secuencias:

$$x1[n] = [1, 2, 3, 4]$$

$$x_2[n] = [-2, 3, 1, 6]$$

a) Calcula las DFT usando la expresión de la ecuación de análisis.

b) Calcula las DFT de manera matricial.

7. Dada la secuencia $x[n] = (1, 1, -1, -1)$:

a) Calcula su DFT.

b) Dada $y[n] = x[n + 2]$, calcula su DFT utilizando la propiedad de desplazamiento en el tiempo.

c) Dada $z[n] = \omega^3 x[n]$ donde $\omega = e^{j\frac{2\pi}{4}}$, calcula su DFT utilizando la propiedad de desplazamiento en la frecuencia.

d) Calcula la DFT de $y[n]$ y $z[n]$ a partir de la definición y comprueba que se obtiene el mismo resultado que en los apartados (b) y (c).

8. La DFT de $x[n] = a^n$ es $X[k] = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$:

a) ¿Cuál es la DFT de $x_1[n] = a^{n-1}$?

b) ¿Cuál es la DFT de $x_2[n] = a^n + a^{n-1}$?

9. La DFT de $x[n]$ es $X[k]$. Indica cuáles de los siguientes pares de transformadas son correctos, justificando tu respuesta.

a) $x[n + 1] \leftrightarrow X[k]e^{j\frac{2\pi k}{N}}$.

b) $x[-n] \leftrightarrow X[k]$.

c) $x[n - 1] \leftrightarrow X[k]e^{j\frac{2\pi k}{N}}$.

10. Dadas las siguientes secuencias discretas:

$$x_1 = \{1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$x_2 = \{2, 1, 1, 0, 0\}$$

calcula su convolución circular de 5 muestras

11. Calcula la convolución circular de 9 muestras de las siguientes secuencias (ambas de período $N = 9$):

$$x_1[n] = \{\dots, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$x_2[n] = \{\dots, \underline{0}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$$

12. Dadas las secuencias siguientes:

$$x_1[n] = [1,2,3,4]$$

$$x_2[n] = [-2,3,1,6]$$

- Calcula la DFT de la señal x_1 usando la expresión de la ecuación de análisis.
- Calcula la DFT de la señal x_2 de manera matricial.
- Calcula la convolución circular de las señales x_1 y x_2 de forma que el resultado sea igual a hacer la convolución lineal.
- Indica si es verdadera la siguiente afirmación, justificando tu respuesta:

$$IDFT_4(DFT_4(x_1[n]) \cdot DFT_4(x_2[n])) = x_1[n] * x_2[n],$$

donde DFT_N e $IDFT_N$ quieren decir una DFT y una IDFT de N puntos/muestras, respectivamente. Asimismo el símbolo $*$ es la convolución lineal de ambas señales.

- Calcula, siguiendo el método que quieras, la IDFT de la señal $X_1[k]$ obtenida en el apartado (a).

13. Dada la siguiente secuencia:

$$x_1[n] = [4,3,2,1]$$

- Calcula la DFT de la señal x_1 de manera matricial.
- Imagina que tenemos una señal $x_2[n]$ periódica que tiene como señal patrón $x_1[n]$. ¿Cuáles serían los coeficientes a_k de la serie discreta de Fourier de la señal $x_2[n]$?
- Si queremos:

$$x_1 \circledast_N x_1 = x_1 * x_1,$$

es decir, hacer la convolución circular de la señal x_1 por sí misma, y además que su resultado sea igual a la convolución lineal de la señal x_1 por sí misma. ¿De cuántas muestras (valor de N), como mínimo, debemos hacer la convolución circular para que sea igual a la convolución lineal? Razónalo.

14. Dadas las siguientes secuencias:

$$x_1[n] = [4,3]$$

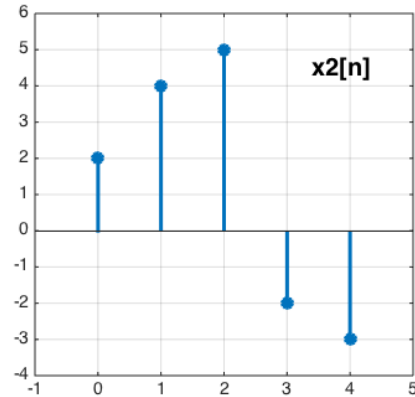
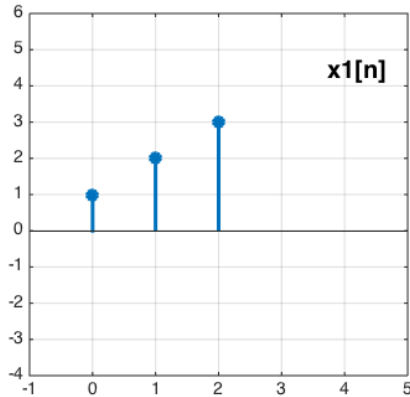
$$x_2[n] = [1, -1]$$

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

calcula la señal x_3 haciendo la convolución circular de las señales x_1 y x_2 . Es decir:

$$x_3[n] = x_1[n] \circledast_N x_2[n]$$

14. Dadas las siguientes señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$,



Calcula la expresión que relaciona sus DFTs $X_1[k]$ y $X_2[k]$, SIN calcular explícitamente las DFTs.

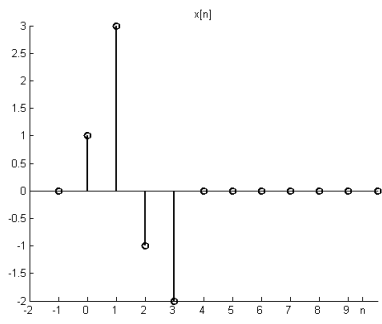
15. Si $x_1[n] = (2, 4, 0, 1)$

Sabiendo que la relación entre las transformadas de Fourier (DFT) de 4 muestras de $x_1[n]$ y otra señal $x_2[n]$ es la siguiente: $X_2[k] = 3X_1[k]e^{-j\frac{6\pi k}{4}}$

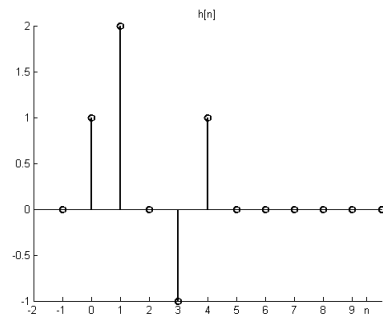
Calcula $x_2[n]$, SIN calcular explícitamente las transformadas DFT $X_1[k]$ ni $X_2[k]$.

16. Considera las secuencias $h[n] = \{1, 3, -1, -2\}$ y $x[n] = \{1, 2, 0, -1\}$. Comprueba la propiedad de convolución circular $x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] \circledast X_2[k]$

17. Calcula la convolución lineal de las siguientes secuencias mediante la convolución circular



a



b

SOLUCIONES

1. Calcula la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de cada una de las siguientes señales:

a) $x_0 = 1$, $x_1 = -1$.

Aplicamos la definición de la DFT:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} , k = 0, \dots, N-1 ,$$

donde en este ejercicio $N = 2$.

$$X[k] = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2}k0} - 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{2}k1} = 1 - (-1)^{-k} = 1 + (-1)^{1-k}.$$

Así pues,

$$X[0] = 1 + (-1)^{1-0} = 0,$$

$$X[1] = 1 + (-1)^{1-1} = 2.$$

La solución se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\boxed{X = (0,2)}$$

También se puede resolver este ejercicio usando matrices:

$$X = M \cdot x = \begin{pmatrix} e^{-j\frac{2\pi}{2}0 \cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{2}0 \cdot 1} \\ e^{-j\frac{2\pi}{2}1 \cdot 0} & e^{-j\frac{2\pi}{2}1 \cdot 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

donde cada fila de M se corresponde con un valor de k (empezando desde 0) y cada columna corresponde a un valor de n (empezando desde 0).

b) $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = -1$.

Aplicando la definición de DFT:

$$\begin{aligned} X[k] &= 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k0} + 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k1} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k2} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k3} \\ &= 1 + 1 \cdot (-j)^k - 1 \cdot (-1)^k - 1 \cdot (j)^k. \end{aligned}$$

$$X[0] = 0,$$

$$X[1] = 2 - 2j,$$

$$X[2] = 0,$$

$$X[3] = 2 + 2j,$$

Así pues, el resultado es $\boxed{X = (0, 2 - 2j, 0, 2 + 2j)}$.

También se podría haber resuelto de forma matricial.

c) $x_0 = 3, x_1 = -1, x_2 = 4, x_3 = 2.$

Aplicando la definición de DFT:

$$X[k] = 3 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k0} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k1} + 4 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k2} + 2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k3} = 3 - 1 \cdot (-j)^{-k} + 4 \cdot (-1)^{-k} + 2 \cdot (j)^{-k}.$$

Así pues, el resultado es $X = (8, -1 + 3j, 6, -1 - 3j).$

d) $x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = -1, x_4 = 0, x_5 = 0.$

El resultado es $X = (0, 2, 0, 2, 0, 2).$

2. Dada la secuencia de longitud $N = 4$, definida por $x[n] = \cos(\frac{\pi}{2}n)$ para $n = 0, 1, 2, 3$ calcula su Transformada Discreta de Fourier (DFT).

Tenemos una secuencia de longitud $N = 4$ y por lo tanto $e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + j \sin(\frac{\pi}{2}) = j$. El vector x es igual a:

$$x = (\cos(\frac{\pi}{2}0), \cos(\frac{\pi}{2}1), \cos(\frac{\pi}{2}2), \cos(\frac{\pi}{2}3)) = (1, 0, -1, 0).$$

Esta vez calcularemos la DFT de forma matricial:

$$X = M \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Calcula la Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT) de las secuencias:

a) $X = (0, 2)$

Aplicamos la definición de IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, \dots, N-1,$$

siendo $N = 2$.

$$x[n] = \frac{1}{2} (X[0] \cdot 1 + X[1] \cdot e^{j\pi 1n}) = e^{j\pi 1n} = (-1)^n,$$

$$x[0] = 1, \quad x[1] = -1$$

$$x = (1, -1)$$

b) $X = (0, -2j, 0, 2j).$

Este apartado lo resolveremos de forma matricial:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \quad y \quad M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix},$$

$$X = M \cdot x; \quad M^{-1} \cdot X = M^{-1} \cdot M \cdot x; \quad M^{-1} \cdot X = x;$$

$$x = M^{-1} \cdot X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2j \\ 0 \\ 2j \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $X = (0,4,0,0,0,0,4)$.

Tenemos una secuencia de longitud $N = 8$.

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Así pues:

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X[k] e^{j \frac{\pi}{4} kn} = \frac{1}{8} (4 \cdot e^{j \frac{\pi}{4} n} + 4 \cdot e^{j \frac{\pi}{4} 7n}) = \frac{1}{2} (e^{j \frac{\pi}{4} n} + e^{j \frac{\pi}{4} 7n}) = \\ &= \frac{1}{2} (e^{j \frac{\pi}{4} n} + e^{-j \frac{\pi}{4} n}) = \cos\left(\frac{\pi}{4} n\right). \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} x[0] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 0\right) = 1, \\ x[1] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x[2] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ x[3] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 3\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x[4] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 4\right) = \cos(\pi) = -1, \\ x[5] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 5\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ x[6] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 6\right) = 0, \\ x[7] &= \cos\left(\frac{\pi}{4} 7\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es:

$$x = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

4. Calcula la transformada discreta de Fourier (DFT) de la secuencia:

$$x_0 = 3 + 2j, \quad x_1 = 12j, \quad x_2 = 1 - j, \quad x_3 = -1 - j.$$

Matricialmente, sabiendo que $N = 4$, obtenemos que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 + 2j \\ 12j \\ 1 - j \\ -1 - j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 12j \\ 15 + 2j \\ 5 - 10j \\ -11 + 4j \end{pmatrix}$$

5. Calcula la transformada discreta inversa de Fourier (IDFT) de la secuencia:

$$X_0 = j, \quad X_1 = 1 + j, \quad X_2 = 2 - 2j, \quad X_3 = 3 + j.$$

Matricialmente, sabiendo que $N = 4$, obtenemos que:

$$x = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j \\ 1 + j \\ 2 - 2j \\ 3 + j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 + 0.25j \\ -0.5 + 0.25j \\ -0.5 - 0.75j \\ -0.5 + 1.25j \end{pmatrix}$$

6. Calcula la DFT de las secuencias:

$$x1[n] = [1, 2, 3, 4]$$

$$X_0 = 10, \quad X_1 = -2 + 2j, \quad X_2 = -2, \quad X_3 = -2 - 2j$$

$$x2[n] = [-2, 3, 1, 6]$$

$$X_0 = 8, \quad X_1 = -3 + 3j, \quad X_2 = -10, \quad X_3 = -3 - 3j$$

7. Dada la secuencia $x[n] = (1, 1, -1, -1)$:

a) Calcula su DFT.

Aplicando la definición de DFT:

$$X[k] = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k0} + 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k1} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k2} - 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k3} = \\ = 1 + 1 \cdot (-j)^k - 1 \cdot (-1)^k - 1 \cdot (j)^k.$$

$$X[0] = 0,$$

$$X[1] = 2 - 2j,$$

$$X[2] = 0,$$

$$X[3] = 2 + 2j,$$

Así pues, el resultado es $X = (0, 2 - 2j, 0, 2 + 2j)$.

También se podría haber resuelto de forma matricial.

- b) Dada $y[n] = x[n + 2]$, calcula su DFT utilizando la propiedad de desplazamiento en el “tiempo”.

El desplazamiento es -2, ya que si seguimos rigurosamente la propiedad de desplazamiento temporal, tenemos que $x[n - (-2)]$. Sabemos que el desplazamiento temporal añade una exponencial en frecuencia que será $e^{-j\frac{2\pi}{4}k(-2)} = e^{j\pi k}$. Así pues, cada muestra de la señal $X[k]$ estará multiplicada por esta exponencial:

$$\begin{aligned} Y[0] &= e^{j\pi \cdot 0} \cdot X[0] = 1 \cdot 0 = 0, \\ Y[1] &= e^{j\pi \cdot 1} \cdot X[1] = (-1) \cdot (2 - 2j) = -2 + 2j, \\ Y[2] &= e^{j\pi \cdot 2} \cdot X[2] = 1 \cdot 0 = 0, \\ Y[3] &= e^{j\pi \cdot 3} \cdot X[3] = (-1) \cdot (2 + 2j) = -2 - 2j, \end{aligned}$$

Por lo tanto, el resultado es $\boxed{Y = (0, -2 + 2j, 0, -2 - 2j)}$

- c) Dada $z[n] = \omega^3 x[n]$ donde $\omega = e^{j\frac{2\pi}{4}n}$, calcula su DFT utilizando la propiedad de desplazamiento en la “frecuencia”.

Sabemos que una exponencial en el dominio temporal implica un desplazamiento frecuencial. Así pues $Z[k] = X[k - 3]$.

$$\begin{aligned} Z[0] &= X[-3] = X[-3 + 4] = X[1] = 2 - 2j, \\ Z[1] &= X[-2] = X[-2 + 4] = X[2] = 0, \\ Z[2] &= X[-1] = X[-1 + 4] = X[3] = 2 + 2j, \\ Z[3] &= X[0] = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\boxed{Z = (2 - 2j, 0, 2 + 2j, 0)}$$

Se ha de tener presente que todas las operaciones que aparecen con los índices k o n , siempre se deben hacer módulo N . Esto se hace para trabajar con valores que estén dentro del intervalo $[0, N - 1]$. Así para $N = 4$, tenemos que $x[6] = x[6 \bmod 4] = 2$ (nos quedamos con el resto de dividir 6 entre 4). Para $x[4]$, tenemos que $x[4] = x[0]$. Si el número es negativo, por ejemplo, $x[-3]$, entonces le sumamos N hasta que sea positivo y luego, si es necesario, hacemos el módulo. $X[-3] = x[-3 + 4] = x[1]$ y $x[-6] = [-6 + 4 + 4] = x[2]$.

- d) Calcula la DFT de $y[n]$ y $z[n]$ a partir de la definición y comprueba que se obtiene el mismo resultado que en los apartados(b) y (c).

Para $y[n] = x[n + 2]$ tenemos que:

$$\begin{aligned} y[0] &= x[2] = -1, \\ y[1] &= x[3] = -1, \end{aligned}$$

$$y[2] = x[4] = x[4 \bmod 4] = x[0] = 1,$$

$$y[3] = x[5] = x[5 \bmod 4] = x[1] = 1.$$

$$Y = M \cdot y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 + 2j \\ 0 \\ -2 - 2j \end{pmatrix}$$

Para $z[n] = \omega^3 x[n]$, sabiendo que $\omega^3 = (-j)^n$, tenemos que:

$$z[0] = (-j)^0 x[0] = 1,$$

$$z[1] = (-j)^1 x[1] = -j,$$

$$z[2] = (-j)^2 x[2] = x[0] = 1,$$

$$z[3] = (-j)^3 x[3] = x[1] = -j.$$

$$Z = M \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ 1 \\ -j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2j \\ 0 \\ 2 + 2j \\ 0 \end{pmatrix}$$

8. La DFT de $x[n] = a^n$ es $X[k] = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{2\pi k}{N}}}$:

a) ¿Cuál es la DFT de $x_1[n] = a^{n-1}$?

Vemos que se aplica un desplazamiento temporal sobre la señal original. Esto implica la aparición de una exponencial en el dominio frecuencial. Así pues:

$$X_1[k] = \left(\frac{1}{1 - ae^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \right) \cdot e^{-j\frac{2\pi k}{N}}$$

b) ¿Cuál es la DFT de $x_2[n] = a^n + a^{n-1}$?

Aplicando la propiedad de linealidad, obtenemos que:

$$X_1[k] = \frac{1}{1 - ae^{-j\frac{2\pi k}{N}}} + \left(\frac{e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}{1 - ae^{-j\frac{2\pi k}{N}}} \right)$$

9. La DFT de $x[n]$ es $X[k]$. Decid cuáles de los siguientes pares de transformadas son correctos, justificando vuestra respuesta.

$$a) x[n + 1] \leftrightarrow X[k]e^{j\frac{2\pi k}{N}}.$$

Es correcta porque verifica la propiedad de desplazamiento temporal.

$$b) x[-n] \leftrightarrow X[k].$$

Esta transformada no es correcta, porque la TF de la inversión temporal es $x[-n] \leftrightarrow X[-k]$.

$$c) x[n - 1] \leftrightarrow X[k]e^{j\frac{2\pi k}{N}}.$$

Esta transformada no es correcta, puesto que no verifica la propiedad de desplazamiento temporal. De hecho, la señal temporal es diferente a la del apartado A y da la misma señal en frecuencia. Si el apartado A es correcto, éste debe ser incorrecto.

10. Calcula la convolución circular de 5 muestras de las siguientes señales

$$x_1 = \{1,1,0,0,0\}$$

$$x_2 = \{2,1,1,0,0\}$$

Vemos que las señales son de la misma longitud, $N = 5$. Hay que desplazar circularmente 5 veces una de las señales, en nuestro caso, será x_2 .

$$n = 0 \rightarrow x_2[((-m))_5]$$

$$x_1[n] = \{1,1,0,0,0\}$$

$$x_2[n] = \{2,0,0,1,1\}$$

Ahora multiplicamos ambas señales y sumamos los valores para obtener $x_3[0]$:

$$x_3[0] = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2$$

Seguimos con el mismo procedimiento:

$$n = 1 \rightarrow x_2[((1 - m))_5]$$

$$x_1[n] = \{1,1,0,0,0\}$$

$$x_2[n] = \{1,2,0,0,1\}$$

Ahora multiplicamos ambas señales y sumamos los valores para obtener $x_3[1]$:

$$x_3[1] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 3$$

$$n = 2 \rightarrow x_2[((2 - m))_5]$$

$$x_1[n] = \{1,1,0,0,0\}$$

$$x_2[n] = \{1,1,2,0,0\}$$

Ahora multiplicamos ambas señales y sumamos los valores para obtener $x_3[2]$:

$$x_3[2] = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 2$$

$$n = 3 \rightarrow x_2[((3 - m))_5]$$

$$x_1[n] = \{1,1,0,0,0\}$$

$$x_2[n] = \{0,1,1,2,0\}$$

Ahora multiplicamos ambas señales y sumamos los valores para obtener $x_3[3]$:

$$x_3[3] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 0 = 1$$

$$n = 4 \rightarrow x_2[((4 - m))_5]$$

$$x_1[n] = \{1,1,0,0,0\}$$

$$x_2[n] = \{0,0,1,1,2\}$$

Ahora multiplicamos ambas señales y sumamos los valores para obtener $x_3[4]$:

$$x_3[4] = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$$

Así pues la señal $x_3[n]$ que surge de la convolución circular es:

$$x_3[n] = \{2,3,2,1,0\}$$

Tras ver estos ejemplos, se recomienda poner en práctica los conocimientos adquiridos mediante la realización de los ejercicios de la colección de problemas asociados a este módulo.

11. Calcula la convolución circular de 9 muestras de las siguientes secuencias (ambas de período $N = 9$):

$$x_1[n] = \{\dots, \underline{1}, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}$$

$$x_2[n] = \{\dots, \underline{0}, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, \dots\}$$

La solución es:

$$y[n] = \{\dots, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 4, 3, 3, \dots\}$$

Paso a paso se operaría de la siguiente manera:

Primero, para cada una de las señales, sólo nos quedamos con la información que forma un período:

$$x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$x_2[n] = \{0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0\}$$

Sabemos que el resultado de la siguiente convolución circular no será igual a la convolución lineal de ambas señales (ya que la convolución circular debería ser, como mínimo, de 17 muestras).

A continuación, aplicaremos el método de desplazamiento circular. El primer desplazamiento es $n = 0$.

$$x_2 \left[((-m))_9 \right] = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0\}$$

Vemos que es como si reflejáramos la señal $x_2[n]$, es decir, la giráramos respecto al eje Y. Ahora se multiplica punto a punto la señal girada con x_1 y se suman los valores:

$$x_1[n] = \{1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$x_2 \left[((-m))_9 \right] = \{0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0\}$$

$$y[0] = 1 + 1 + 1 = 3$$

Desplazamos circularmente (girar) una unidad ($n = 1$) la señal $x_2[n]$:

$$x_2 \left[((1 - m))_9 \right] = \{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

Esta nueva señal la multiplicamos punto a punto con $x_1[n]$ y sumamos los valores:

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((1-m))_9 \right] = \{0,0,0,0,1,1,1,1,1\}$$

$$\boxed{y[1] = 1 + 1 + 1 = 3}$$

Ahora vamos girando la señal $x_2[n]$ hasta que llegemos al noveno desplazamiento. Así $n = 2$

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((2-m))_9 \right] = \{1,0,0,0,0,1,1,1,1\}$$

$$\boxed{y[2] = 1 + 1 + 1 + 1 = 4}$$

4º desplazamiento ($x_2[n]$ desplazada circularmente 3 unidades, $n = 3$):

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((3-m))_9 \right] = \{1,1,0,0,0,0,1,1,1\}$$

$$\boxed{y[3] = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5}$$

5º desplazamiento ($x_2[n]$ desplazada circularmente 4 unidades, $n = 4$):

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((4-m))_9 \right] = \{1,1,1,0,0,0,0,1,1\}$$

$$\boxed{y[4] = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5}$$

6º desplazamiento ($x_2[n]$ desplazada circularmente 5 unidades, $n = 5$):

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((5-m))_9 \right] = \{1,1,1,1,0,0,0,0,1\}$$

$$\boxed{y[5] = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5}$$

7º desplazamiento ($x_2[n]$ desplazada circularmente 6 unidades, $n = 6$):

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((6-m))_9 \right] = \{1,1,1,1,1,0,0,0,0\}$$

$$\boxed{y[6] = 1 + 1 + 1 + 1 = 4}$$

8º desplazamiento ($x_2[n]$ desplazada circularmente 7 unidades, $n = 7$):

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((7-m))_9 \right] = \{0,1,1,1,1,1,0,0,0\}$$

$$\boxed{y[7] = 1 + 1 + 1 = 3}$$

9º desplazamiento ($x_2[n]$ desplazada circularmente 8 unidades, $n = 8$):

$$x_1[n] = \{1,1,1,1,0,0,1,1,1\}$$

$$x_2 \left[((8 - m))_9 \right] = \{0,0,1,1,1,1,1,0,0\}$$

$$\boxed{y[8] = 1 + 1 + 1 = 3}$$

12. Dadas las secuencias siguientes:

$$x_1[n] = [1,2,3,4]$$

$$x_2[n] = [-2,3,1,6]$$

a) Calcula la DFT de la señal x_1 usando la expresión de la ecuación de análisis.

Partiendo de la expresión:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

y sabiendo que $N = 4$, obtenemos:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^3 x_1[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \sum_{n=0}^3 x_1[n] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}kn} = 1 + 2e^{-j\frac{\pi}{2}k} + 3e^{-j\pi k} + 4e^{-j\frac{\pi}{2}k3}$$

$$X_1[0] = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$X_1[1] = 1 + 2 \cdot (-j) + 3 \cdot (-1) + 4j = -2 + 2j$$

$$X_1[2] = 1 + 2 \cdot (-1) + 3 + 4 \cdot (-1) = -2$$

$$X_1[3] = 1 + 2j + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-j) = -2 - 2j$$

Por lo tanto, el resultado que nos piden es:

$$\boxed{X_1[n] = [10, -2 + 2j, -2, -2 - 2j]}$$

b) Calcula la DFT de la señal x_2 de manera matricial.

Sabemos que $N = 4$, así pues, debemos construir la matriz D de 4×4 .

$$X_1[k] = D \cdot x_1[n] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 3 + 1 + 6 \\ -2 - 3j - 1 + 6j \\ -2 - 3 + 1 - 6 \\ -2 + 3j - 1 - 6j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ -3 + 3j \\ -10 \\ -3 - 3j \end{pmatrix}$$

c) Calcula la convolución circular de las señales x_1 y x_2 de forma que el resultado sea igual a hacer la convolución lineal.

Para que la convolución circular sea igual a la lineal, se debe cumplir la siguiente condición:

$$N \geq N_1 + N_2 - 1$$

Así pues, $N \geq 4 + 4 - 1$; $N \geq 7$.

Debemos expandir las dos secuencias a 7 muestras añadiendo ceros (*zero padding*):

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2[n] = [-2, 3, 1, 6, 0, 0, 0]$$

Ahora podemos realizar la convolución circular.

n=0

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[\left((-m) \right)_7 \right] = [-2, 0, 0, 0, 6, 1, 3]$$

$$x_3[0] = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = -2$$

n=1

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[\left((1 - m) \right)_7 \right] = [3, -2, 0, 0, 0, 6, 1]$$

$$x_3[1] = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 1 = -1$$

n=2

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[\left((2 - m) \right)_7 \right] = [1, 3, -2, 0, 0, 0, 6]$$

$$x_3[2] = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 6 = 1$$

n=3

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[\left((3 - m) \right)_7 \right] = [6, 1, 3, -2, 0, 0, 0]$$

$$x_3[3] = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 9$$

n=4

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[\left((4 - m) \right)_7 \right] = [0, 6, 1, 3, -2, 0, 0]$$

$$x_3[4] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 27$$

n=5

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[((5 - m))_7 \right] = [0, 0, 6, 1, 3, -2, 0]$$

$$x_3[5] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 22$$

n=6

$$x_1[n] = [1, 2, 3, 4, 0, 0, 0]$$

$$x_2 \left[((6 - m))_7 \right] = [0, 0, 0, 6, 1, 3, -2]$$

$$x_3[6] = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) = 24$$

Por lo tanto, la solución es:

$$\boxed{x_3[n] = x_1[n] \circledast_7 x_2[n] = [-2, -1, 1, 9, 27, 22, 24]}$$

Recordad que el símbolo \circledast_N indica una convolución circular de N puntos/muestras.

d) Indica si es verdadera la siguiente afirmación justificando la respuesta

$$IDFT_4(DFT_4(x_1[n]) \cdot DFT_4(x_2[n])) = x_1[n] * x_2[n],$$

donde DFT_N e $IDFT_N$ quieren decir una DFT y una IDFT de N puntos/muestras, respectivamente. Asimismo el símbolo * es la convolución lineal de ambas señales.

Esta afirmación no es cierta. Para que lo sea, la DFT y la IDFT deberían ser de como mínimo 7 puntos/muestras, ya que recordemos dos cosas:

$$x_1[n] \circledast_N x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] \cdot X_2[k]$$

$$x_1[n] \circledast_N x_2[n] = x_1[n] * x_2[n] \text{ si y sólo si } N \geq N_1 + N_2 - 1$$

Por lo tanto, con la expresión que nos da el enunciado, estaríamos obteniendo la convolución circular de 4 muestras/puntos. Es decir:

$$IDFT_4(DFT_4(x_1[n]) \cdot DFT_4(x_2[n])) = x_1[n] \circledast_4 x_2[n]$$

Pero para que la convolución circular de ambas secuencias sea igual a su convolución lineal, debemos calcular la siguiente expresión:

$$\boxed{IDFT_7(DFT_7(x_1[n]) \cdot DFT_7(x_2[n])) = x_1[n] \circledast_7 x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]}$$

e) Calcula, siguiendo el método que quieras, la IDFT de la señal $X_1[k]$ obtenida en el apartado (a).

Posiblemente, la forma más fácil es matricialmente. Recordemos que en esta ocasión la matriz D debe ser la matriz D de la DFT pero transpuesta y conjugada (D^H , matriz de Hermite de D).

$$x_1[n] = \frac{1}{N} D^H \cdot X_1[k] = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -2 + 2j \\ -2 \\ -2 - 2j \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Como vemos, el resultado es el esperado, es decir, la señal $x_1[n]$ que nos daba el propio enunciado. De esta forma, sabemos que tanto el apartado A como el F, están bien.

13. Dada la siguiente secuencia:

$$x_1[n] = [4,3,2,1]$$

a) Calcula la DFT de la señal x_1 de manera matricial.

Sabemos que $N = 4$, así pues, debemos construir la matriz D de 4×4 .

$$X_1[k] = D \cdot x_1[n] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$X_1[k] = D \cdot x_1[n] = \begin{pmatrix} 4 + 3 + 2 + 1 \\ 4 - 3j - 2 + j \\ 4 - 3 + 2 - 1 \\ 4 + 3j - 2 - j \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 10 \\ 2 - 2j \\ 2 \\ 2 + 2j \end{pmatrix}}$$

b) Imagina que tenemos una señal $x_2[n]$ periódica que tiene como señal patrón $x_1[n]$. ¿Cuáles serían los coeficientes a_k de la serie discreta de Fourier de la señal $x_2[n]$?

Sabemos que la DFT y la SDF se relacionen así:

$$X[k] = N_0 a_k$$

Por lo tanto:

$$a_k = \frac{X[k]}{N_0}$$

Así pues:

$$a_0 = \frac{X[0]}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a_1 = \frac{X[1]}{4} = \frac{2 - 2j}{4} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2}$$

$$a_2 = \frac{X[2]}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{X[3]}{4} = \frac{2 + 2j}{4} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2}$$

c) Si queremos:

$$x_1 \circledast_N x_1 = x_1 * x_1,$$

es decir, hacer la convolución circular de la señal x_1 por sí misma, y además que su resultado sea igual a la convolución lineal de la señal x_1 por sí misma. ¿De cuántas muestras (valor de N), como mínimo, debemos hacer la convolución circular para que sea igual a la convolución lineal? Razónalo.

Debería ser de $N = 7$, ya que para que esto se dé:

$$N \geq N_1 + N_2 - 1$$

donde $N_1 = N_2 = 4$.

14. Dadas las siguientes secuencias:

$$x_1[n] = [4,3]$$

$$x_2[n] = [1, -1]$$

$$x_3[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

calcula la señal x_3 haciendo la convolución circular de las señales x_1 y x_2 . Es decir:

$$x_3[n] = x_1[n] \circledast_N x_2[n]$$

Para que la convolución circular sea igual a la lineal (nos lo dice el enunciado), se ha de cumplir la siguiente condición:

$$N \geq N_1 + N_2 - 1$$

Así pues, $N \geq 2 + 2 - 1$; $N \geq 3$.

Debemos expandir las dos secuencias a 3 muestras añadiendo ceros (*zero padding*):

$$x_1[n] = [4,3,0]$$

$$x_2[n] = [1, -1, 0]$$

Ahora podemos realizar la convolución circular. La resolución está hecha utilizando el método de desplazamiento circular, pero se podría utilizar el de extensiones periódicas.

n=0

$$x_1[m] = [4,3,0]$$

$$x_2 \left[((-m))_3 \right] = [\dots, 1, 0, -1, \dots]$$

$$x_3[0] = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 4$$

n=1

$$x_1[m] = [4, 3, 0]$$

$$x_2 \left[((1-m))_3 \right] = [\dots, -1, 1, 0, \dots]$$

$$x_3[1] = 4 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1$$

n=2

$$x_1[m] = [4, 3, 0]$$

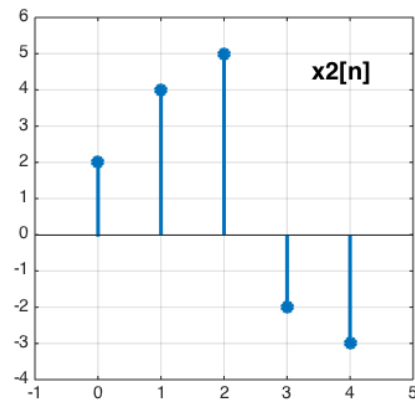
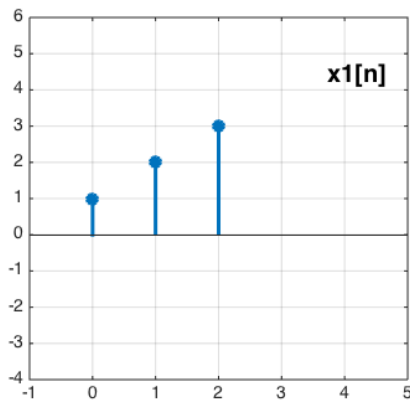
$$x_2 \left[((2-m))_3 \right] = [\dots, 0, -1, 1, \dots]$$

$$x_3[2] = 4 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = -3$$

Solución:

$$x_3[n] = [4, -1, -3]$$

14. Dadas las siguientes señales $x_1[n]$ y $x_2[n]$,



Calcula la expresión que relaciona sus DFTs $X_1[k]$ y $X_2[k]$, SIN calcular explícitamente las DFTs.

Podemos expresar la secuencia $x_2[n]$ en función de $x_1[n]$ (x_1 escalada por un factor 2 más x_1 desplazada dos muestras a la derecha)

$$x_2[n] = 2x_1[n] - x_1[n-2]$$

Por lo tanto, según las propiedades de linealidad y desplazamiento circular de la DFT, la relación entre las DFT de N muestras de las señales es:

$$X_2[k] = 2X_1[k] + X_1[k]e^{-j\frac{2\rho k}{N}}$$

donde $X_1[k]$ y $X_2[k]$ son las DFT de N muestras de $x_1[n]$ y $x_2[n]$, respectivamente, con $N \geq 5$

5 = el máximo del número de muestras de x_1 y x_2

15. Si $x_1[n] = (2, 4, 0, 1)$

Sabiendo que la relación entre las transformadas de Fourier (DFT) de 4 muestras de $x_1[n]$ y otra señal $x_2[n]$ es la siguiente: $X_2[k] = 3X_1[k]e^{-j\frac{6\rho k}{4}}$

Calcula $x_2[n]$, SIN calcular explícitamente las transformadas DFT $X_1[k]$ ni $X_2[k]$.

$$X_2[k] = 3X_1[k]e^{-j\frac{6\rho k}{4}}$$

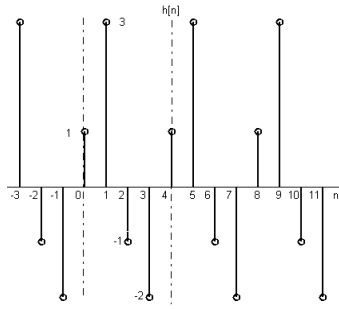
Por las propiedades de linealidad y desplazamiento circular de la DFT, podemos inferir la relación que existe entre las secuencias x_1 y x_2 : desplazamiento circular de 3 muestras y escalado

$$x_2[n] = 3x_1[n-3]$$

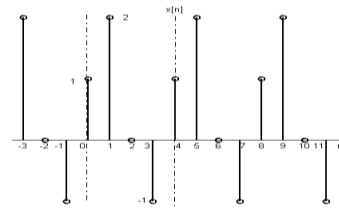
Por lo tanto, $x_2[n] = [12, 0, 3, 6]$

16. Considera las secuencias $h[n] = \{1, 3, -1, -2\}$ y $x[n] = \{1, 2, 0, -1\}$. Comprueba la propiedad de convolución circular $x_1[n]x_2[n] \xleftrightarrow{DFT} X_1[k] \odot X_2[k]$

Hagamos primero la convolución circular. Consideramos que ambas secuencias son periódicas de período 4.

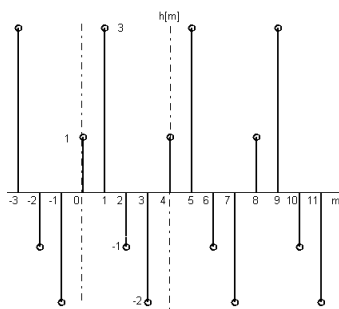


(a)

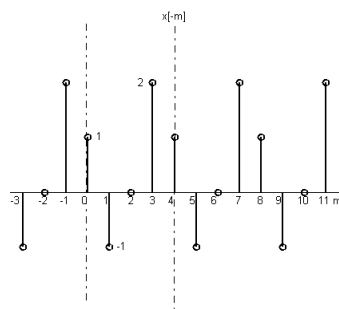


(b)

Para hacer la convolución pasemos a eje m e invirtamos temporalmente la señal de la figura (b) ; dibujemos $x[-m]$



(c)



(d)

Por tanto al tener que evaluar la salida entre las muestras 0 y 3, mediante la operación convolución

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} h[m]x[n-m]$$

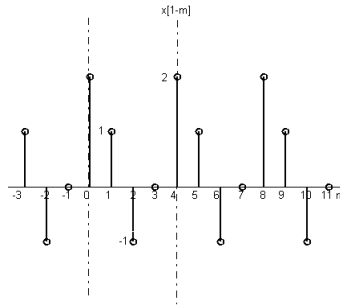
Así pues la salida en la muestra cero, vendrá determinada por la suma entre las muestras 0 y 3 del producto de las figuras (c) y (d).

$$y[0] = \sum_{m=0}^3 h[m]x[-m] = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-2) = -6 \text{ (Fijaos que es el producto escalar si consideramos dos vectores } h = [1, 3, -1, -2] \text{ y } x = [1, -1, 0, 2]).$$

Para obtener la salida en la muestra 1, hemos de evaluar la expresión

$$y[1] = \sum_{m=0}^3 h[m]x[1-m]$$

Dibujemos la señal $x[1-m]$, tras su representación veremos como equivale a un desplazamiento circular de una muestra al comparar con la figura (d)



(e)

Si representamos vectorialmente tendríamos el producto escalar de los vectores $h = [1, 3, -1, -2]$ y $x_1 = [2, 1, -1, 0]$. Si comparamos x_1 y x , se observa que el efecto es un giro circular, es decir la última muestra de x pasa a ser la primera de x_1 , desplazándose el resto de valores una muestra hacia la derecha (de ahí el nombre de convolución circular)

El resultado es

$$y[1] = \sum_{m=0}^3 h[m]x[1-m] = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 = 6$$

Entendiendo este concepto, es fácil evaluar el resto de muestras en el período

$$y[2] = h \cdot x_2 = [1, 3, -1, -2] \cdot [0, 2, 1, -1] = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 7$$

$$y[3] = h \cdot x_3 = [1, 3, -1, -2] \cdot [-1, 0, 2, 1] = 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = -5$$

Queremos comprobar que la transformada inversa del producto de dos DFT's corresponde a la convolución circular de las correspondientes funciones temporales.

Obtengamos las DFT :

$$H(k) = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}nk} = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j\frac{\pi}{2}nk} \text{ con } k \text{ variando entre } 0 \text{ y } 3.$$

$$H(0) = \sum_{n=0}^3 h[n] = h[0] + h[1] + h[2] + h[3] = 1 + 3 - 1 - 2 = 1$$

$$H(1) = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j\frac{\pi}{2}n} = h[0] + h[1]e^{-j\frac{\pi}{2}} + h[2]e^{-j\pi} + h[3]e^{-j\frac{3\pi}{2}} = 1 - 3j + 1 - 2j = 2 - 5j$$

$$H(2) = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j\pi n} = h[0] + h[1]e^{-j\pi} + h[2]e^{-j2\pi} + h[3]e^{-j3\pi} = 1 - 3 - 1 + 2 = -1$$

$$H(3) = \sum_{n=0}^3 h[n] e^{-j\frac{3\pi}{2}n} = h[0] + h[1]e^{-j\frac{3\pi}{2}} + h[2]e^{-j3\pi} + h[3]e^{-j\frac{9\pi}{2}} = 1 + 3j + 1 + 2j = 2 + 5j$$

Para la señal de entrada

$$X(k) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{2\rho}{4}nk} = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{\rho}{2}nk} \text{ con } k \text{ variando entre } 0 \text{ y } 3.$$

$$X(0) = \sum_{n=0}^3 x[n] = X[0] + X[1] + X[2] + X[3] = 1 + 2 + 0 - 1 = 2$$

$$X(1) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{\rho}{2}n} = x[0] + X[1] e^{-j\frac{\rho}{2}} + X[2] e^{-j\rho} + X[3] e^{-j\frac{3\rho}{2}} = 1 - 2j + 0 - j = 1 - 3j$$

$$X(2) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\rho n} = X[0] + X[1] e^{-j\rho} + X[2] e^{-j2\rho} + X[3] e^{-j3\rho} = 1 - 2 + 0 + 1 = 0$$

$$X(3) = \sum_{n=0}^3 x[n] e^{-j\frac{3\rho}{2}n} = X[0] + X[1] e^{-j\frac{3\rho}{2}} + X[2] e^{-j3\rho} + X[3] e^{-j\frac{9\rho}{2}} = 1 + 2j + 0 + j = 1 + 3j$$

Por tanto el producto de ambas será:

$$Y(k) = H(k) X(k)$$

$$Y(0) = H(0) X(0) = 2$$

$$Y(1) = H(1) X(1) = -13 - j11$$

$$Y(2) = H(2) X(2) = 0$$

$$Y(3) = H(3) X(3) = -13 + j11$$

Calculamos la IDFT

$$y[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^3 Y(k) e^{j\frac{\rho}{2}nk}$$

$$y[0] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) = \frac{1}{4} [Y(0) + Y(1) + Y(2) + Y(3)] = \frac{1}{4} [2 - 13 - j11 + 0 - 13 + j11] = \frac{-24}{4} = -6$$

$$y[1] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) e^{j\frac{\rho}{2}k} = \frac{1}{4} \left[Y(0) + Y(1) e^{j\frac{\rho}{2}} + Y(2) e^{j\rho} + Y(3) e^{j\frac{3\rho}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} [2 + (-13 - j11)j + 0 + (-13 + j11)(-j)] = \frac{1}{4} [2 - 13j + 11 + 0 + 13j + 11] = \frac{24}{4} = 6$$

$$y[2] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) e^{j\rho k} = \frac{1}{4} [Y(0) + Y(1) e^{j\rho} + Y(2) e^{j2\rho} + Y(3) e^{j3\rho}] =$$

$$= \frac{1}{4} [2 + (-13 - j11)(-1) + 0 + (-13 + j11)(-1)] = \frac{1}{4} [2 + 13 + 11j + 0 + 13 - 11j] = \frac{28}{4} = 7$$

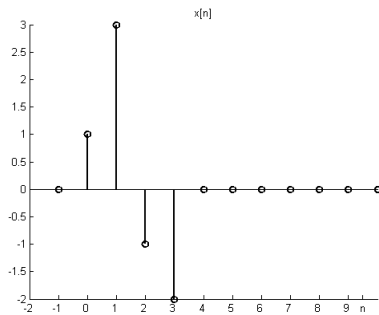
$$y[3] = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 Y(k) e^{j\frac{3\rho}{2}k} = \frac{1}{4} \left[Y(0) + Y(1) e^{j\frac{3\rho}{2}} + Y(2) e^{j3\rho} + Y(3) e^{j\frac{9\rho}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{4} [2 + (-13 - j11)(-j) + 0 + (-13 + j11)j] = \frac{1}{4} [2 + 13j - 11 + 0 - 13j - 11] = \frac{-20}{4} = -5$$

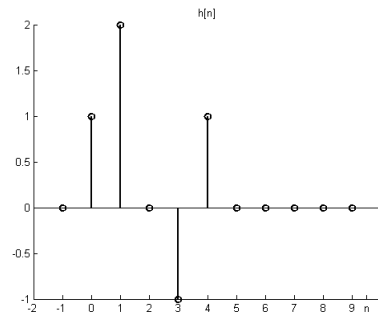
Observándose obtenemos el resultado de la convolución periódica y en consecuencia verificamos la propiedad de la convolución circular.

17. Calcula la convolución lineal de las siguientes secuencias mediante la convolución circular

Dadas las secuencias aperiódicas de la figura (a) y (b)

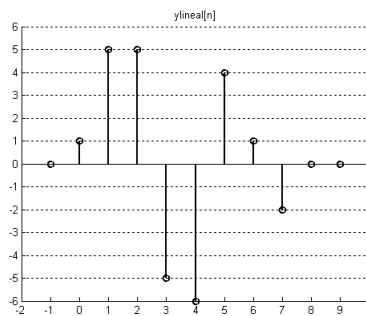


a



b

Si evaluamos su convolución lineal obtenemos



c

Primero calcularemos la convolución circular con 5 muestras para comprobar que el resultado no coincide con la convolución lineal

Calculamos la convolución circular de longitud $K \geq \text{Max}(5,4) = 5$, con lo que completamos las secuencias con ceros. $x = [1,3,-1,-2,0]$ (hemos añadido un cero) y $h = [1,2,0,-1,1]$ (la misma). Si resolvemos (primero invertimos x) $x_i = [1,0,-2,-1,3]$ y hacemos los productos escalares, tendremos

$$\begin{aligned}
y(0) &= [1, 2, 0, -1, 1][1, 0, -2, -1, 3] = 1 + 0 + 0 + 1 + 3 = 5 \\
y(1) &= [1, 2, 0, -1, 1][3, 1, 0, -2, -1] = 3 + 2 + 0 + 2 - 1 = 6 \\
y(2) &= [1, 2, 0, -1, 1][-1, 3, 1, 0, -2] = -1 + 6 + 0 + 0 - 2 = 3 \\
y(3) &= [1, 2, 0, -1, 1][-2, -1, 3, 1, 0] = -2 - 2 + 0 + -1 - 0 = -5 \\
y(4) &= [1, 2, 0, -1, 1][0, -2, -1, 3, 1] = 0 - 4 + 0 + -3 + 1 = -6
\end{aligned}$$

Si observamos $L - K = 8 - 5 = 3$ (indica que los tres primeros no coinciden, por tanto coinciden los $2K - L = 10 - 8 = 2$ (los dos últimos, ver valor de las muestras 3 y 4 en la figura c). Al margen de que nos quedan 3 puntos por evaluar.

Veamos que sucede cuando completamos con cero cada secuencia hasta que ambas tenga de longitud la duración de su convolución lineal, en este caso $dur = 5 + 4 - 1 = 8$, por tanto tendríamos $x = [1, 3, -1, -2, 0, 0, 0, 0]$ y $h = [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0]$. Con lo que $xi = [1, 0, 0, 0, 0, -2, -1, 3]$

Evaluando

$$\begin{aligned}
y(0) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][1, 0, 0, 0, 0 - 2, -1, 3] = 1 \\
y(1) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][3, 1, 0, 0, 0, 0 - 2, -1] = 5 \\
y(2) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][-1, 3, 1, 0, 0, 0, 0 - 2] = 5 \\
y(3) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][-2, -1, 3, 1, 0, 0, 0, 0] = -5 \\
y(4) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][0, -2, -1, 3, 1, 0, 0, 0] = -6 \\
y(5) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][0, 0, -2, -1, 3, 1, 0, 0] = 4 \\
y(6) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][0, 0, 0, -2, -1, 3, 1, 0] = 1 \\
y(7) &= [1, 2, 0, -1, 1, 0, 0, 0][0, 0, 0, 0, -2, -1, 3, 1] = -2
\end{aligned}$$

Que coincide exactamente con la convolución lineal en el intervalo de muestras de 0 a 7.

Además por la propiedad convolución, el resultado se hubiese obtenido a partir de la IDFT del producto de las DFT de duración 8 tras haber completado con ceros.

El resultado es idéntico si hubiésemos completado con ceros tal que la duración de cada secuencia cumpliera $K > L > M + N - 1$ (donde para muestras de índice superior a la convolución se obtendría que $y(> L) = 0$, (valor esperado ya que si observas la figura c, a partir de las muestra 7, esta ya tiene valor cero)